Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（五）

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

一九八一年·济南

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（五）

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

※

山东科学技术出版社出版

山 东 省 新 华 书 店 发 行

山 东 人 民 印 刷 厂 印 刷

※

787×1092毫米32开本 24.375印张 620千字

1980年7月第1版 1981年11月第2次印刷

印数：82,001—110,000

书号 13195·21 定价 2.60元

出版说明

吉米多维奇(Б.П.ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自五十年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易

查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张敦先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目　录

第六章　多变量函数的微分法

§1.　多变量函数的极限.连续性

1°　多变量函数的极限　设函数 $f(P)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在以 P_0 为聚点的集合 E 上有定义．若对于任何的 $\varepsilon>0$ 存在有 $\delta=\delta(\varepsilon, P_0)>0$，使得只要 $P\in E$ 及 $0<\rho(P, P_0)<\delta$〔其中 $\rho(P, P_0)$ 为 P 和 P_0 二点间的距离〕，则

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2°　连续性　若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$ 于 P_0 点是连续的.

若函数 $f(P)$ 于已知域内的每一点连续，则称函数 $f(P)$ 于此域内是连续的.

3°　一致连续性　若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在有仅与 ε 有关的 $\delta>0$，使得对于域 G 中的任何点 P'，P''，只要是

$$\rho(P', P'')<\delta,$$

便有不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$$

成立，则称函数 $f(P)$ 于域 G 内是一致连续的.

于有界闭域内的连续函数于此域内是一致连续的。

确定并绘出下列函数存在的域：

3136. $u=x+\sqrt{y}$.

解 存在域为半平面，

$y\geq 0$，

如图 6·1 阴影部分所示，包括整个 Ox 轴在内。

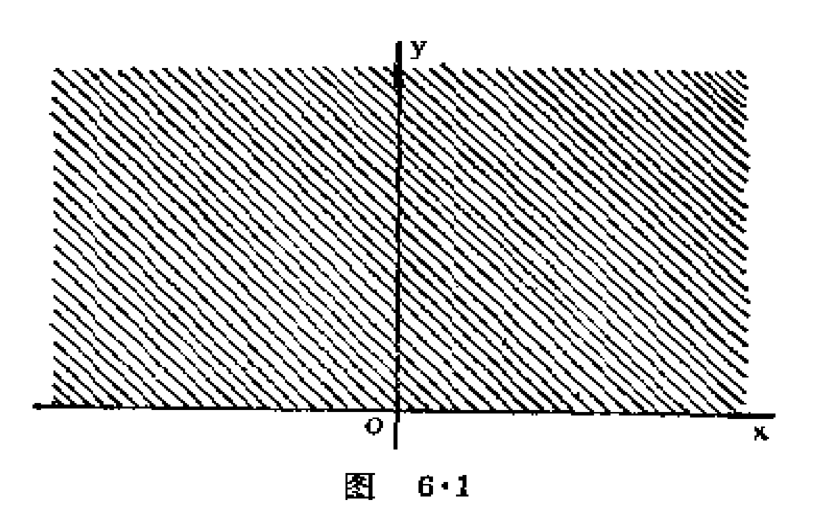


图 6·1

3137. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

解 存在域为满足不等式

$|x|\leq 1, |y|\geq 1$

的点集，如图 6·2 阴影部分所示，包括边界（粗实线）在内。

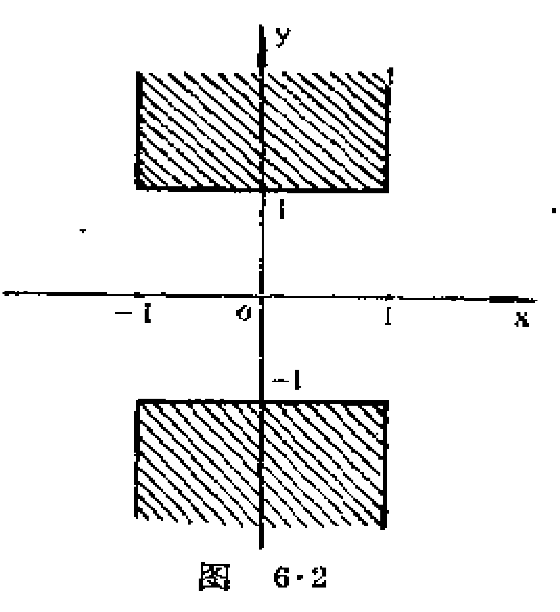


图 6·2

3138. $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解 存在域为圆

$$x^2+y^2\leqslant 1,$$

如图 6·3 阴影部分所示，包括圆周在内．

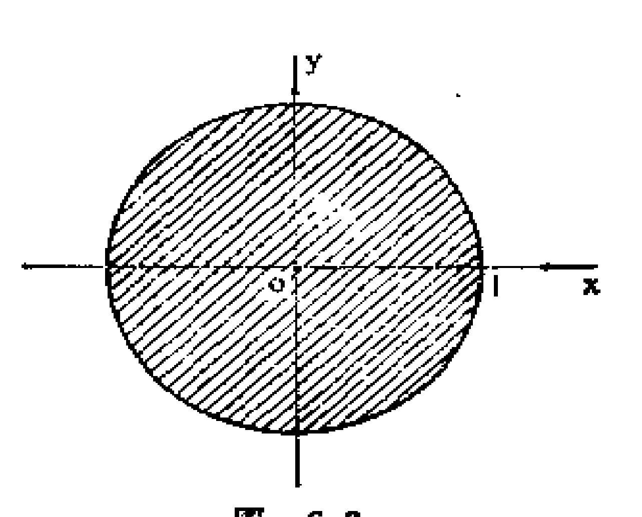


图 6·3

3139. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

解 存在域为满足不等式

$$x^2+y^2>1$$

的点集，即圆 $x^2+y^2=1$ 的外面，如图6·4 所示，不包括圆周（虚线）在内．

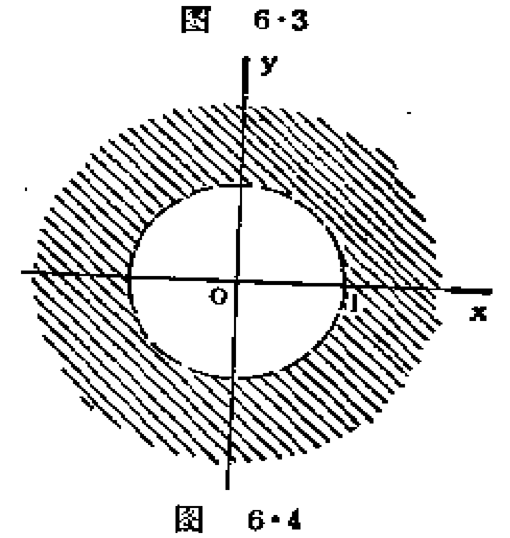


图 6·4

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

解 存在域为满足不等式

$$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$$

的点集，如图6·5所示的环，包括边界在内．

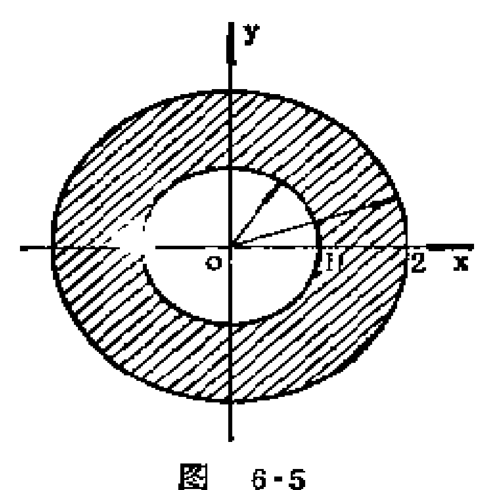


图 6·5

3141. $u=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解 存在域为满足不等式

$$x\leqslant x^2+y^2<2x$$

的点集．由 x^2+y^2

$\geqslant x$得出

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2+y^2<2x$ 得出

$(x-1)^2+y^2<1$，

两者组成一月形，如图 6·6 阴影部分所示。

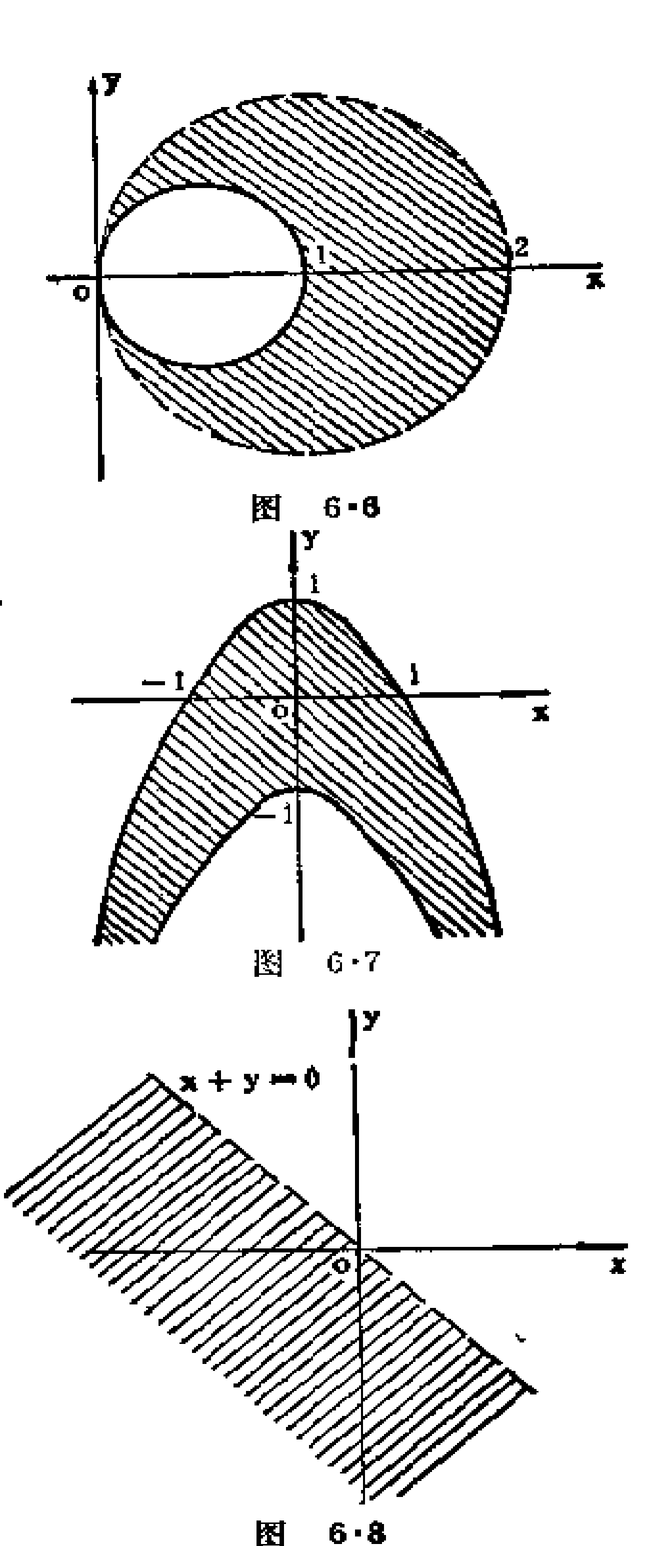


图 6·6

图 6·7

图 6·8

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$。

解 存在域为满足不等式

$$-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$$

的点集，如图 6·7 阴影部分所示，包括边界在内。

3143. $u=\ln(-x-y)$。

解 存在域为半平面

$$x+y<0,$$

如图 6·8 阴影部分所示，不包括直线 $x+y=0$ 在内。

3144. $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

解 存在域为满足

不等式

$$\left|\frac{y}{x}\right| \leqslant 1$$

或 $|y| \leqslant |x|$ $(x \neq 0)$ 的点集，这是一对对顶的直角，如图 6·9 阴影部分所示，不包括原点在内。

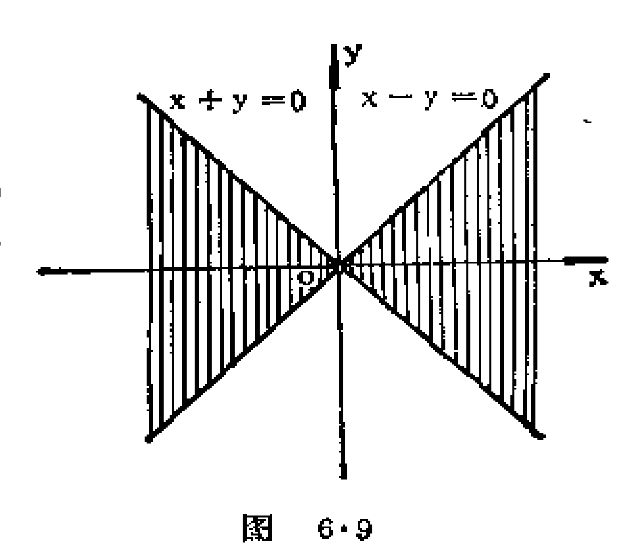


图 6·9

3145. $u = \arccos \dfrac{x}{x+y}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$$

的点集．由 $\left|\dfrac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$ 得 $|x| \leqslant |x+y|$ $(x \neq -y)$，即 $x^2 \leqslant x^2 + 2xy + y^2$ 或 $y(y+2x) \geqslant 0$，也即

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ y \geqslant -2x, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y \leqslant 0, \\ y \leqslant -2x. \end{cases}$$

但 x，y 不能同时为零．这是由直线：$y=0$ 和 $y=-2x$ 所围成的一对对顶的角，如图 6·10 阴影部分所示，包括边界在内，但不包括公共顶点 $O(0,0)$ 在内。

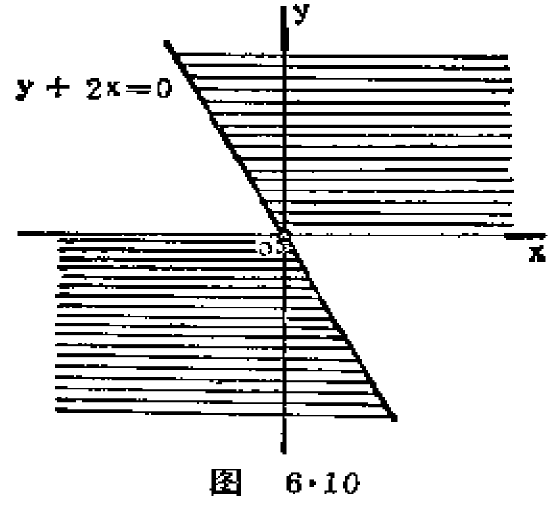


图 6·10

3146. $u=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{y^2}\right|\leqslant 1 \text{ 及 } |1-y|\leqslant 1\ (y\neq 0)$$

的点集，即

$$\begin{cases} y^2\geqslant x, \\ 0<y\leqslant 2 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} y^2\geqslant -x, \\ 0<y\leqslant 2. \end{cases}$$

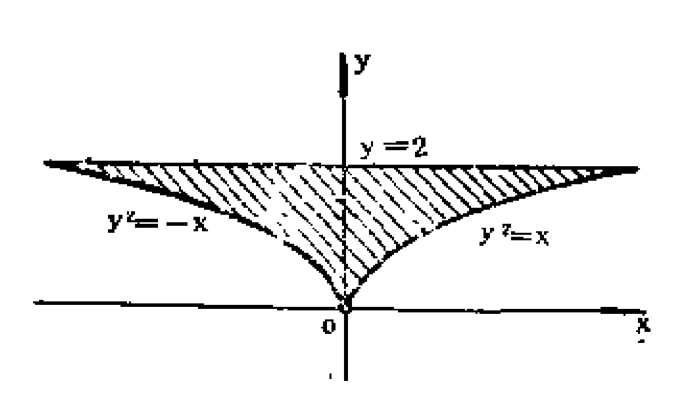
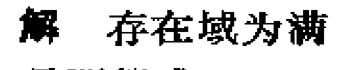


图 6·11

这是由抛物线：$y^2=x$，$y^2=-x$ 和直线$y=2$所围成的曲边三角形，如图6·11阴影部分所示，不包括原点在内。

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.



解 存在域为满足不等式 $\sin(x^2+y^2)\geqslant 0$ 或 $2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi$ ($k=0,1,2,\cdots$)的点集，如图6·12所示的同心环族。

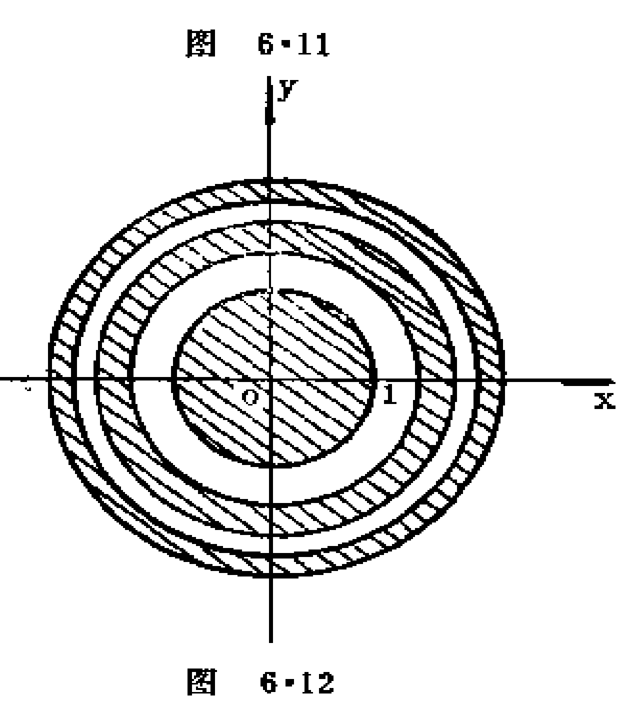


图 6·12

3148. $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

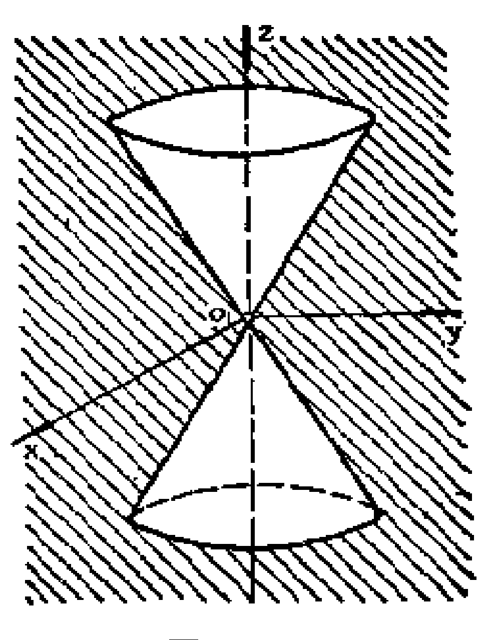


图 6·13

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant 1$$

(x, y 不同时为零)

或

$$x^2+y^2-z^2 \geqslant 0$$

(x, y 不同时为零)

的点集，这是圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$ 的外面，如图 6·13 阴影部分所示，包括边界在内，但要除去圆锥的顶点.

3149. $u=\ln(xyz)$.

解 存在域为满足不等式

$$xyz>0$$

的点集，即

$x>0$, $y>0$, $z>0$; 或 $x>0$, $y<0$, $z<0$;

$x<0$, $y<0$, $z>0$; 或 $x<0$, $y>0$, $z<0$.

其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体，但不包括坐标面. 由于图形为读者所熟知，故省略。以下有类似情况，不再说明.

3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解 存在域为满足不等式

$$-x^2-y^2+z^2>1$$

的点集．这是双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的内部，如图6·14阴影部分所示，不包括界面在内．

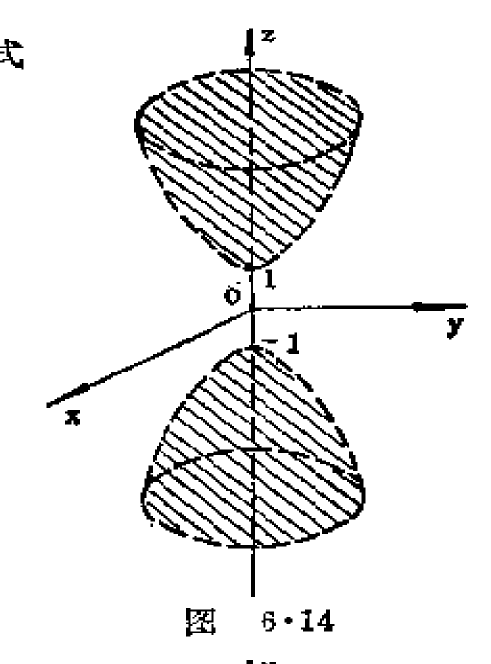


图 6·14

作出下列函数的等位线：

3151. $z=x+y$.

解 等位线为平行直线族

$$x+y=k,$$

其中 k 为一切实数，如图 6·15 所示．

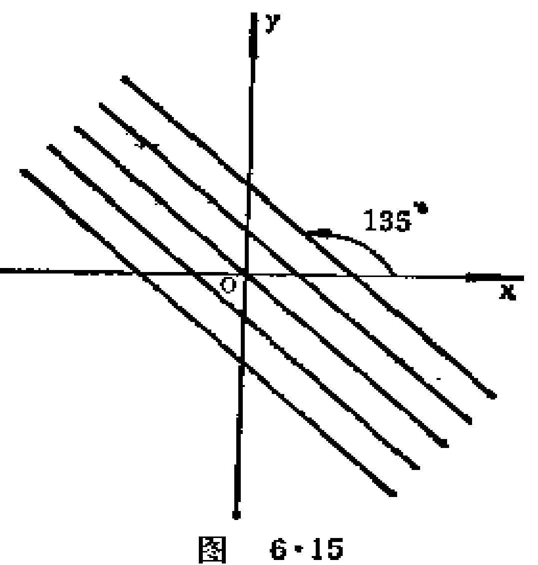


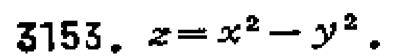
图 6·15

3152. $z=x^2+y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2+y^2=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$

当$a=0$时为原点；当$a>0$时，等位线为以原点为圆心的同心圆族．



3153. $z=x^2-y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2-y^2=k.$$

当 $k=0$ 时为两条互相垂直的直线：$y=x, y=-x$.

当$k\neq0$时为以$y=\pm x$为公共渐近线的等边双曲线族，其中当$k>0$时顶点为$(-\sqrt{k},\ 0)$，$(\sqrt{k},\ 0)$，当$k<0$时顶点为$(0,-\sqrt{-k})$，$(0,\sqrt{-k})$。

3154. $z=(x+y)^2$.

解 等位线为曲线族

$$(x+y)^2=a^2\ (a\geqslant 0).$$

当$a=0$为直线$x+y=0$。当$a\neq0$时为与直线$x+y=0$平行的且等距的直线$x+y=\pm a$。

3155. $z=\dfrac{y}{x}$.

解 等位线为以坐标原点为束心的直线束

$$y=kx\ (x\neq0),$$

不包括Oy轴在内。

3156. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

解 等位线为椭圆族

$$x^2+2y^2=a^2\ (a>0).$$

长半轴为a，短半轴为$\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，焦点为$\left(-a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$及$\left(a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$。

3157. $z=\sqrt{xy}$.

解 等位线为曲线族

$$xy=a^2\ (a\geqslant 0).$$

当$a=0$时为坐标轴$x=0$及$y=0$。当$a>0$时为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等

边双曲线族，顶点为 $(-a,-a)$及(a, a)。

3158. $z=|x|+y$.

解 等位线为曲线族

$|x|+y=k$,

其中k为一切实数.当$x\geqslant 0$时为$x+y=k$;当$x<0$时为$-x+y=k$。这是顶点在Oy轴上两支互相垂直的射线所构成的折线族，如图6·16所示。

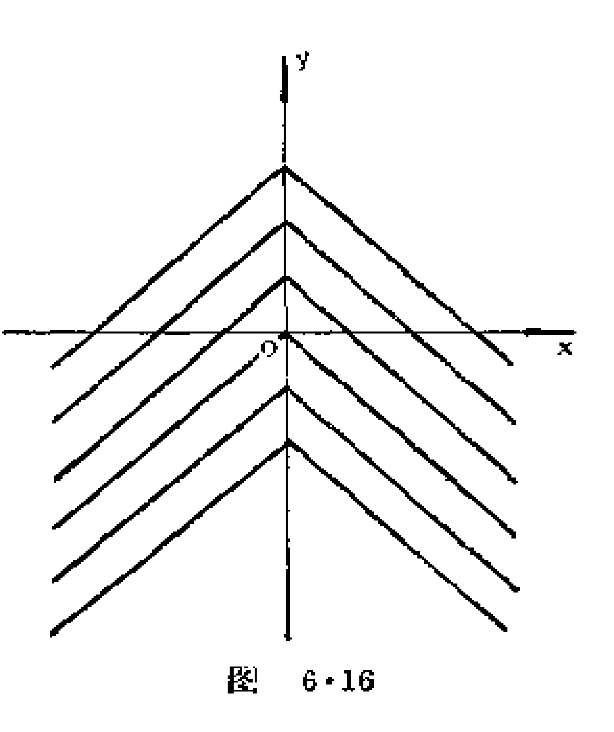


图 6·16

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

解 等位线为曲线族

$$|x|+|y|-|x+y|=a.$$

因为恒有 $|x|+|y|\geqslant|x+y|$，所以$a\geqslant 0$。

当 $a=0$ 时，由$|x|+|y|=|x+y|$两边平方即得

$$xy\geqslant 0,$$

即为整个第一、第三象限，包括两坐标轴在内。

当 $a>0$ 时，$xy<0$，分下面四组求解：

(1) $x>0, y<0$，$x+y\geqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $y=-\frac{a}{2}$;

(2) $x>0, y<0, x+y\leqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得$x=\frac{a}{2}$;

（3）$x<0$，$y>0, x+y\geqslant 0, |x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $x=-\frac{a}{2}$；

（4）$x<0$，$y>0, x+y\leqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $y=\frac{a}{2}$。

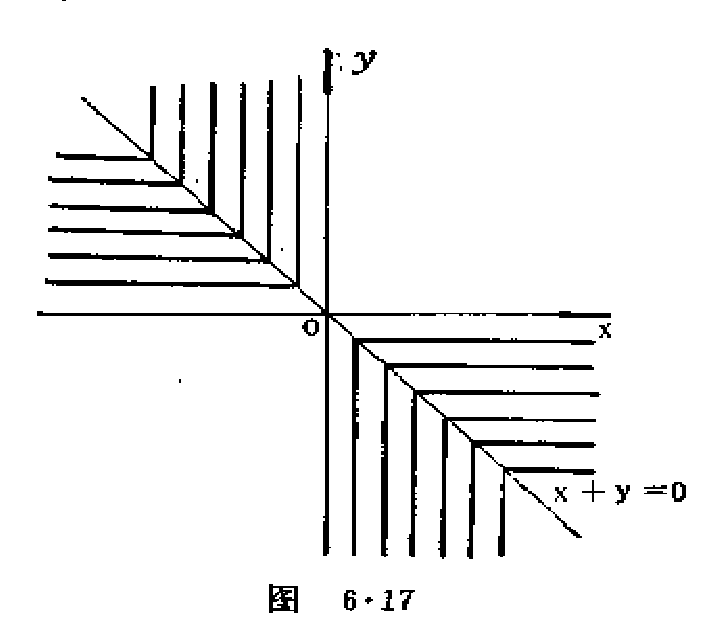


图 6·17

这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族，它的各射线平行于坐标轴，如图 6·17 所示。

3160. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2x}{x^2+y^2}=k \text{（}x,\ y\text{不同时为零）},$$

其中 k 为异于零的一切实数．上式可变形为

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{k}\right)^2 \quad (k\neq 0).$$

当 $k=0$时，即得 $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}=1$，从而等位线为$x=0$即Oy轴，但不包括原点。

当$k\neq0$时为中心在Ox轴上且经过坐标原点（但不包括原点在内）的圆束，圆心在$\left(\frac{1}{k},0\right)$，半径为$\left|\frac{1}{k}\right|$，如图6·18所示。

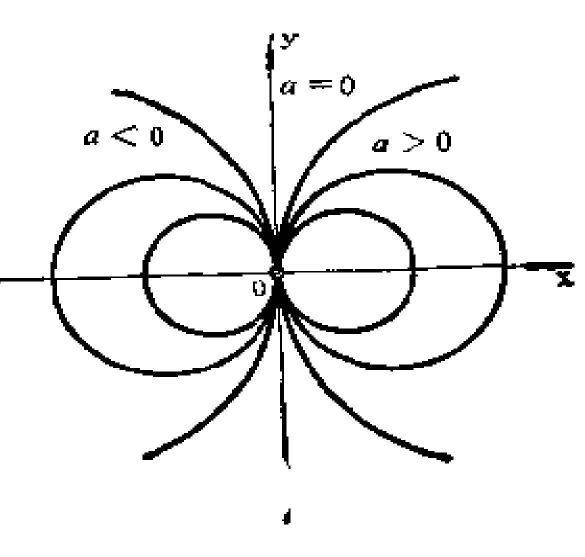
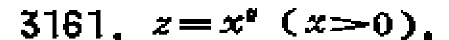


图　6·18



3161. $z=x^y\ (x>0)$.

解　等位线为曲线族

$$x^y=a\ (a>0).$$

当$a=1$时为直线$x=1$及Ox轴的正向半射线，但不包括原点在内。

当$0<a<1$与$a>1$时的图象如图6·19所示。

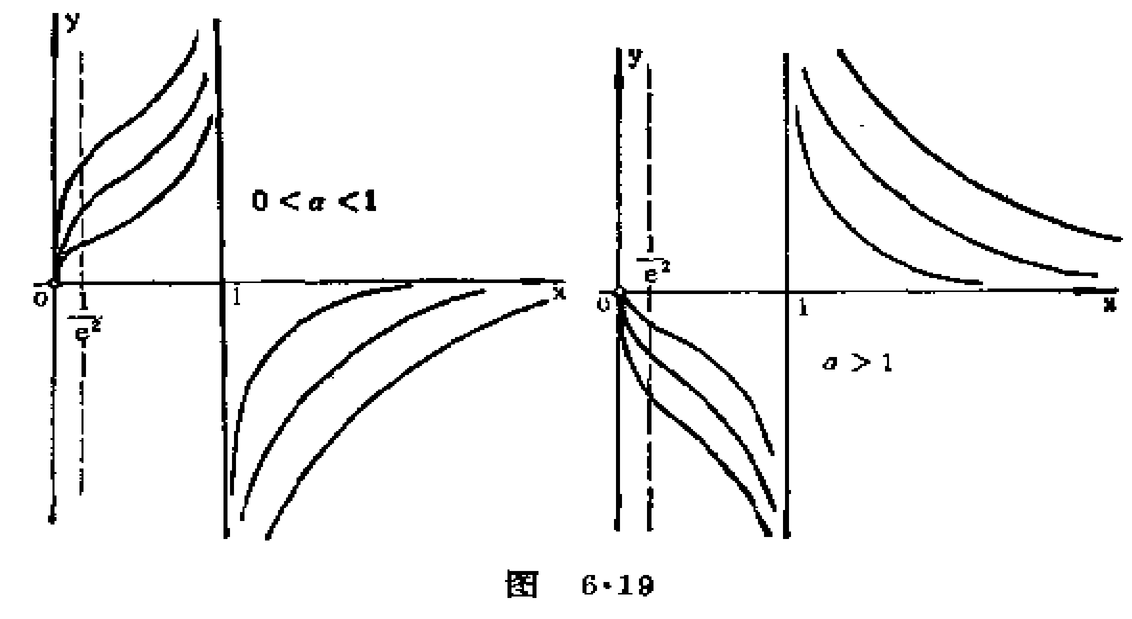


图　6·19

3162. $z=x^ye^{-x}\ (x>0)$.

解　等位线为曲线族

$$x^y e^{-x}=a \quad (a>0),$$

即

$$y\ln x-x=\ln a.$$

当 $a=e^{-1}$ 时为直线 $x=1$ 和曲线$y=\frac{x-1}{\ln x}$；当$0<a<\frac{1}{e}$，$\frac{1}{e}<a<1$或$a\geqslant 1$时图象布满整个右半平面，如图6·20所示，不包括Oy轴.

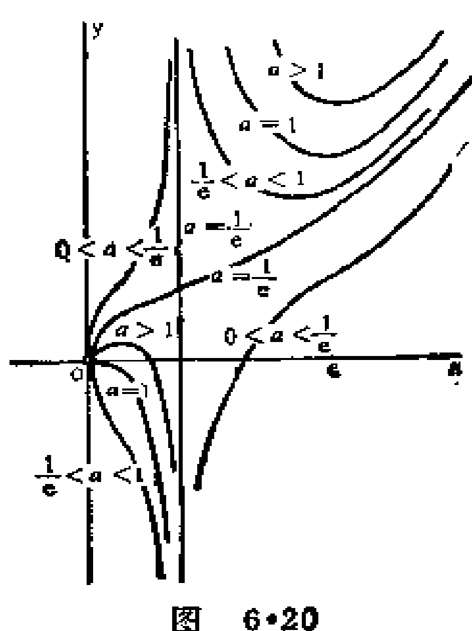


图 6·20

3163. $z=\ln\sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}} \quad (a>0)$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k^2 \quad (k>0).$$

整理得

$$(1-k^2)x^2-2a(1+k^2)x+(1-k^2)a^2 +(1-k^2)y^2=0.$$

当 $k=1$ 时得 $x=0$，即 Oy 轴. 当$k\neq 1$ 时，上述方程可变形为

$$\left[x-\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2+y^2=\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$

这是以点$\left(\frac{a(1+k^2)}{1-k^2},\ 0\right)$为圆心，半径为$\left|\frac{2ak}{1-k^2}\right|$

的圆族．当 $0<k<1$ 时，圆分布在右半平面；当 $k>1$ 时，圆分布在左半平面．

如果注意到圆心与原点距离的平方为

$$\left[\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2=\frac{a^2[(1-k^2)^2+4k^2]}{(1-k^2)^2}$$

$$=a^2+\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$

即等位线圆族与圆 $x^2+y^2=a^2$ 在交点处的半径互相垂直（或圆心距与两圆的半径构成直角三角形），便知等位线圆族与圆 $x^2+y^2=a^2$ 成正交．如图6·21所示．

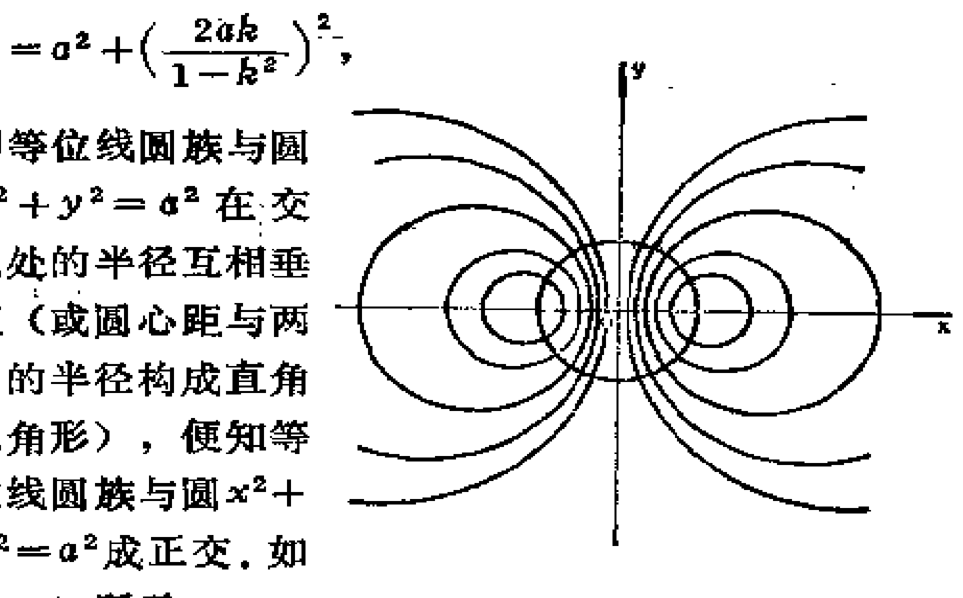


图 6·21

3164. $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$ $(a>0)$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}=k,$$

其中 k 为一切实数，但要除去点 $(-a,0)$ 及 $(a,0)$．当 $k=0$ 时，$y=0$，即为 Ox 轴，但不包含上述两点；当 $k\neq 0$ 时，方程可变形为

$$x^2+\left(y-\frac{a}{k}\right)^2$$

$$=a^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right),$$

这是圆心在Oy轴上且经过点$(-a,0)$及$(a,0)$但不包括这两点在内的圆族，如图6·22所示.

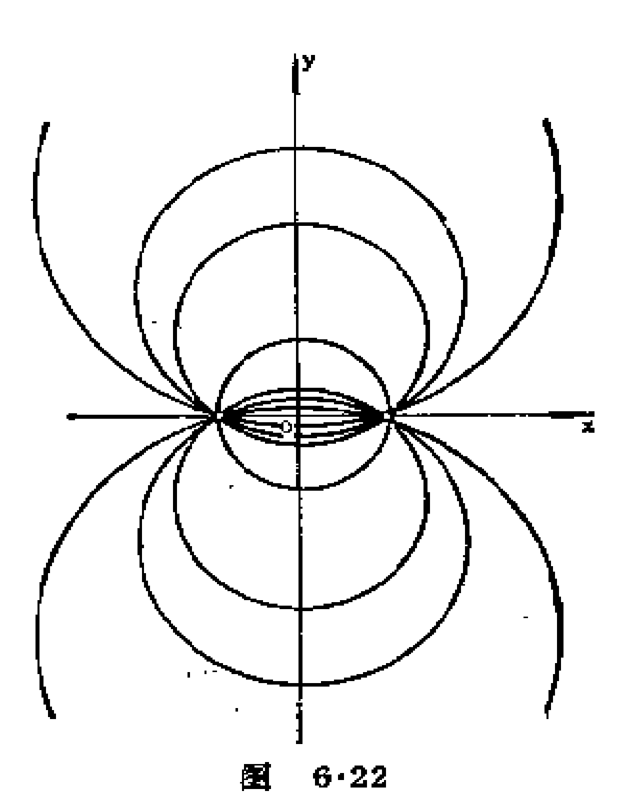


图 6·22

3165. $z=\mathrm{sgn}(\sin x\sin y)$.

解 若$z=0$，则$\sin x\cdot\sin y=0$，此即直线族

$$x=m\pi\text{和}y=n\pi\quad(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

若$z=-1$或$z=1$，则$\sin x\sin y<0$或$\sin x\sin y>0$，此即正方形系

$$m\pi<x<(m+1)\pi,\quad n\pi<y<(n+1)\pi,$$

其中$z=(-1)^{m+n}$. 如图6·23所示，$z=0$时为图中网格直线；$z=1$为图中带斜线的正方形；$z=-1$为图中空白正方形，但后两者都不包括边界.

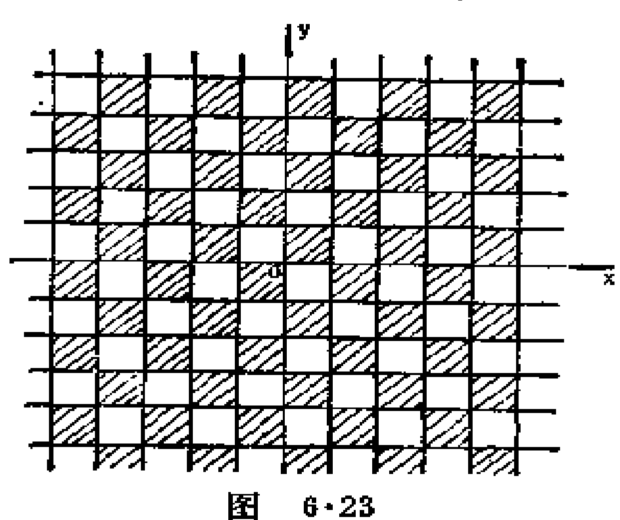


图 6·23

求下列函数的等位

面：

3166. $u=x+y+z$.

解 等位面为平行平面族

$$x+y+z=k,$$

其中 k 为一切实数.

3167. $u=x^2+y^2+z^2$.

解 等位面为中心在原点的同心球族

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (a\geqslant 0),$$

其中当 $a=0$ 时即为原点.

3168. $u=x^2+y^2-z^2$.

解 当$u=0$时等位面为圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$；当 $u>0$ 时等位面为单叶双曲面族 $x^2+y^2-z^2=a^2(a>0)$；当 $u<0$ 时等位面为双叶双曲面族$-x^2-y^2+z^2=a^2(a>0)$.

3169. $u=(x+y)^2+z^2$.

解 等位面为曲面族

$$(x+y)^2+z^2=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时为$x+y=0$和$z=0$. 当$a>0$时作坐标变换

$$\begin{cases} x'=x\cos\frac{\pi}{4}+y\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \\ y'=-x\sin\frac{\pi}{4}+y\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \\ z'=z, \end{cases}$$

这是旋转变换. 在新坐标系中原等位面方程转化为

$$2x'^2+z'^2=a^2,$$

即

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

这是以 y' 轴为公共轴的椭圆柱面，母线的方向平行于 y' 轴，准线为 $y'=0$ 平面上的椭圆

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

长半轴为 a（z' 轴方向），短半轴为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$（x' 轴方向）．

y' 轴在新系 $O-x'y'z'$ 中的方程为

$$\begin{cases}x'=0,\\z'=0,\end{cases}$$

面在旧系 $O-xyz$ 中的方程为

$$\begin{cases}x+y=0,\\z=0,\end{cases}$$

即为所求的椭圆柱面族的公共对称轴．

3170．$u=sgn\sin(x^2+y^2+z^2)$．

解 当 $u=0$ 时等位面为球心在原点的同心球族

$$x^2+y^2+z^2=n\pi\quad(n=0,1,2,\cdots)．$$

当 $u=-1$ 或 $u=1$ 时等位面为球层族

$$n\pi<x^2+y^2+z^2<(n+1)\pi\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$

其中 $u=(-1)^{v}$.

根据曲面的已知方程研究其性质：

3171. $z=f(y-ax)$.

解 引入参数 t，s，将曲面方程 $z=f(y-ax)$ 表成参数方程

$$\begin{cases}x=t,\\y=at+s,\\z=f(s).\end{cases}$$

今固定 s，得到以 t 为参数的直线方程，其方向数为 1，a，0. 因此，曲面为以 1，a，0 为母线方向的一个柱面. 令 $t=0$，可得

$$\begin{cases}x=0,\\y=s,\\z=f(s),\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}x=0,\\z=f(y),\end{cases}$$

这是 $x=0$ 平面上的一条曲线，也是柱面

$$z=f(y-ax)$$

的一条准线.

3172. $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 这是绕 Oz 轴旋转的旋转曲面的标准形式. 令 $y=0$，得曲线

$$\begin{cases}y=0,\\z=f(x) \quad (x\geqslant 0),\end{cases}$$

它是旋转曲面的一条母线.

3173. $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t,s，将曲面方程 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases}x=t,\\y=st\ (t\neq 0),\\z=tf(s).\end{cases}$$

今固定 s，这是以 t 为参数的一条过原点的直线。因此，所给曲面为顶点在原点的一锥面，但不包括原点在内。令 $t=1$，得曲线

$$\begin{cases}x=1,\\y=s,\\z=f(s),\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}x=1,\\z=f(y),\end{cases}$$

这是 $x=1$ 平面上的一条曲线，也是锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一条准线。

3174+*. $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t,s，将曲面方程 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases}x=t,\\y=st,\\z=f(s).\end{cases}$$

---

* 题号右上角“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明。中译本基本是按俄文第二版翻译的。俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

今固定 s，这是一条过点$(0,0,f(s))$的直线，方向数为 $1,s,0$. 因此，它与Oz轴垂直，与 Oxy 平面平行，且其方向与 s 有关. 从而得知，曲面 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表示一个直纹面. 一般说来，它既不是柱面，又不是锥面. 令 $t=1$，得到直纹面的一条准线

$$\begin{cases} x=1, \\ z=f(y). \end{cases}$$

从此曲线上每一点引一条与 Oz轴垂直且相交的直线. 这样的直线的全体，便构成由 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 所表示的直纹面.

3175. 作出函数

$$F(t)=f(\cos t,\ \sin t)$$

的图形，式中

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & 若 y\geqslant x, \\ 0, & 若 y<x. \end{cases}$$

解 按题设，当 $\sin t\geqslant\cos t$，即$\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant t\leqslant\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$F(t)=1$；而当

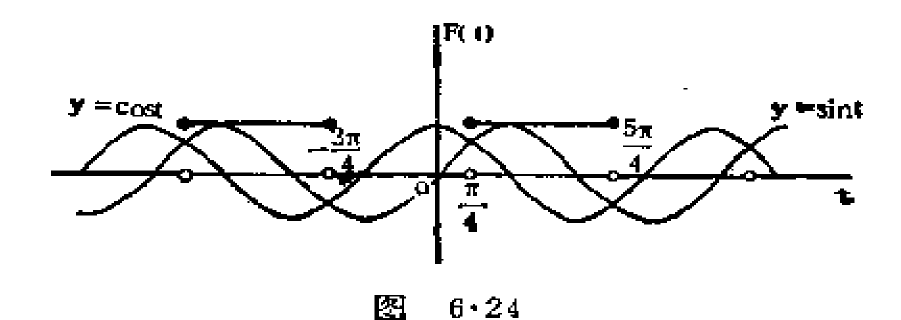


图 6·24

$\sin t < \cos t$，即 $-\frac{3}{4}\pi+2k\pi < t < \frac{\pi}{4}+2k\pi$ 时，$F(t)$ $=0$。如图6·24所示。

3176. 若

$$f(x,\ y)=\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

求 $f\left(1,\ \frac{y}{x}\right)$.

解 $f\left(1,\ \frac{y}{x}\right)=\frac{2\cdot 1\cdot\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$.

3177. 若

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\ (x>0),$$

求 $f(x)$.

解 由 $f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ 知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

3178. 设

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1).$$

若当 $y=1$ 时 $z=x$，求函数 f 和 z.

解 因为当 $y=1$ 时 $z=x$，所以

$$f(\sqrt{x}-1)=x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$$
$$=(\sqrt{x}-1)[(\sqrt{x}-1)+2],$$

从而得

$$f(t)=t(t+2)=t^2+2t,$$

且

$$z=\sqrt{y}+x-1\ (x>0).$$

3179. 设

$$z=x+y+f(x-y).$$

若当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求函数 f 及 z。

解 因为当 $y=0$ 时 $z=x^2$，所以

$$x^2=x+f(x),$$

即

$$f(x)=x^2-x,$$

且

$$z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2.$$

3180. 若 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，求$f(x,y)$。

解 因为

$$f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$=(x+y)^2\frac{x-y}{x+y}=(x+y)^2\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}},$$

所以

$$f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}.$$

3181. 证明：对于函数

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

有

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\right\}=1;\ \lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\right\}=-1,$$

从而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在。

证 $$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right\}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

由于两个单极限都存在，而累次极限不等，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在。

3182. 证明：对于函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$

有

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\right\}=0,$$

然而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在。

证 $$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}0=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}$$
$$=\lim_{y\to 0} 0=0.$$

如果按 $y=kx\to 0$ 的方向取极限，则有

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4k^2}{x^4k^2+x^2(1-k)^2}.$$

特别地，分别取 $k=0$ 及 $k=1$，便得到不同的极限 0 及 1．因此，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x, y)$ 不存在.

3183．证明：对于函数

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right\}$ 和 $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\right\}$ 不存在，然而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=0$.

证 由不等式

$$0\leqslant\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=0$.

但当 $x\neq\frac{1}{k\pi}$，$y\to 0$ 时，$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 的极限不存在，因此累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\right\}$ 不存在.同法可证累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right\}$ 也不存在.

3184．求 $\lim\limits_{x\to a}\left\{\lim\limits_{y\to b} f(x, y)\right\}$ 及 $\lim\limits_{y\to b}\left\{\lim\limits_{x\to a} f(x, y)\right\}$，设：

(а) $f(x, y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

(б) $f(x, y)=\frac{x^y}{1+x^y}$, $a=+\infty$, $b=+0$;

(в) $f(x, y)=\sin\frac{\pi x}{2x+y}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

(г) $f(x, y)=\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}$, $a=0$, $b=\infty$;

(д) $f(x, y)=\log_x(x+y)$, $a=1$, $b=0$.

解 (а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty} 0=0$,

$\lim\limits_{y\to\infty}\left\{\lim\limits_{x\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{y\to\infty}\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}$

$=\lim\limits_{y\to\infty} 1=1$;

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\lim\limits_{y\to+0} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\lim\limits_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$\lim\limits_{y\to+0}\left\{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{y\to+0}\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right\}$

$=\lim\limits_{y\to+0} 1=1$;

(в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right\}$

$$=\lim_{x\to\infty} 0 = 0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty} \sin\frac{\pi x}{2x+y}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty} 1 = 1;$$

(г) $$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\cdot\lim_{y\to\infty}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{0\cdot\operatorname{tg}1\right\}=0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}}{\frac{xy}{1+xy}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty} 1 = 1;$$

(д) $$\lim_{x\to 1}\left\{\lim_{y\to 0} f(x, y)\right\}=\lim_{x\to 1}\left\{\lim_{y\to 0}\log_x(x+y)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x}=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 1} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\infty.$$

求下列极限:

3185. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

解 由不等式 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$ 得

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{|x+y|}{x^2+y^2-|xy|}\leqslant\frac{|x+y|}{|xy|}$$

$$\leqslant\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|},$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}\right)=0$，故有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0.$$

3186. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

解 由不等式

$$0\leqslant\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\leqslant\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

及 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)=0$，即得

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0.$$

3187. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\left(\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y\right)=a.$

3188. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left[\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}-2\cdot\frac{x}{e^x}\cdot\frac{y}{e^y}\right]=0^{*)}.$$

*) 利用 564 题的结果。

3189. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解 由不等式

$$0\leqslant\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0$，即得

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

3190. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解 由不等式

$$|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{4}|\ln(x^2+y^2)|$$

及 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)=\lim\limits_{t\to+0}\frac{1}{4}t^2\ln t=0$，即得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=e^0=1.$$

3191. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x}{x+y}}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}} e^{[x\ln(1+\frac{1}{x})]\cdot\frac{x}{x+y}}$

$=e^{[\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})]\cdot[\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\frac{x}{x+y}]}=e^{1\cdot1}=e$.

3192. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+e^0)}{1}=\ln2$.

3193[+]. 若 $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, 问下列极限沿怎样的方向 φ 有确定的极限值存在:

(a) $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$; (б) $\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\cdot\sin2xy$.

解 (a) $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{\cos\varphi}{\rho}}$

$$=\begin{cases}0, & 当\cos\varphi<0;\\ 1, & 当\cos\varphi=0;\\ +\infty, & 当\cos\varphi>0.\end{cases}$$

于是，仅当 $\cos\varphi\leqslant0$ 即 $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时，所给的极限

才有确定的值.

(б) $e^{x^2-y^2}\sin 2xy = e^{\rho^2\cos 2\varphi}\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$.

当 $\rho\to+\infty$时，$\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$ 有界，除$\varphi=\frac{k\pi}{2}$ $(k=0,1,2,3)$外无极限，且

$$\lim_{\rho\to+\infty} e^{\rho^2\cos 2\varphi}=\begin{cases}0, & \text{当 } \cos 2\varphi<0;\\ 1, & \text{当 } \cos 2\varphi=0;\\ +\infty, & \text{当 } \cos 2\varphi>0.\end{cases}$$

于是，仅当$\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$及$\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$以及 $\varphi=0$，$\varphi=\pi$ 时才有确定的极限.

求下列函数的不连续点：

3194. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$在点（0，0）无定义，故原点(0,0)为此函数的不连续点.以下各题类似情况，不再说明.

3195. $u=\frac{xy}{x+y}$.

解 直线 $x+y=0$ 上的一切点均为$u=\frac{xy}{x+y}$的不连续点.

3196. $u=\frac{x+y}{x^3+y^3}$.

解 对于任意不等于零的实数 a，有

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to -a}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to -a}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{3a^2}.$$

于是，对于直线 $x+y=0$ 上除去原点 O 外的一切点均为可移去的不连续点．而原点 $O(0,0)$ 为无穷型不连续点．

3197．$u=\sin\frac{1}{xy}$．

解 $xy=0$ 上的一切点即两坐标轴上的诸点均为 $u=\sin\frac{1}{xy}$ 的不连续点．

3198．$u=\frac{1}{\sin x\sin y}$．

解 直线 $x=m\pi$ 及 $y=n\pi$ $(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 上的各点均为 $u=\frac{1}{\sin x\sin y}$ 的不连续点．

3199．$u=\ln(1-x^2-y^2)$．

解 圆周 $x^2+y^2=1$ 上各点是 $u=\ln(1-x^2-y^2)$ 的不连续点．

3200．$u=\frac{1}{xyz}$．

解 坐标面：$x=0$，$y=0$，$z=0$ 上各点均为 $u=\frac{1}{xyz}$ 的不连续点．

3201．$u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$．

解 点(a,b,c)为$u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$的不连续点.

3202. **证明：函数**

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & 若x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & 若 x^2+y^2=0,\end{cases}$$

分别对于每一个变数x或y（当另一变数的值固定时）是连续的，但并非对这些变数的总体是连续的.

证 先固定$y=a\neq 0$，则得x的函数

$$g(x)=f(x,a)=\begin{cases}\frac{2ax}{x^2+a^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即$g(x)=\frac{2ax}{x^2+a^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$，它是处处有定义的有理函数．又当$y=0$时，$f(x,0)\equiv 0$，它显然是连续的．于是，当变数y固定时，函数$f(x,y)$对于变数x是连续的．同理可证，当变数x固定时．函数$f(x,y)$对于变数y是连续的.

作为二元函数，$f(x,y)$虽在除点$(0,0)$外的各点均连续，但在点$(0,0)$不连续．事实上，当动点$P(x,y)$沿射线$y=kx$趋于原点时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y=kx)}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{2k}{1+k^2},$$

对于不同的k可得不同的极限值，从而知$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)$不存在．因此，函数$f(x,y)$在原点不是二元连续

的．

3203．证明：函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & 若 x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & 若 x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在点 $O(0,0)$ 沿着过此点的每一射线

$$x=t\cos\alpha,\quad y=t\sin\alpha \quad (0 \leqslant t<+\infty)$$

连续，即

$$\lim_{t \to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0);$$

但此函数在点 $(0,0)$ 并非连续的．

证 当 $\sin\alpha=0$ 时，$\cos\alpha=1$ 或 -1．于是，当 $t \neq 0$ 时，$f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=\dfrac{t^2 \cdot 0}{t^4+0}=0$，而 $f(0,0)=0$，故有 $\lim\limits_{t \to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0)$．

当 $\sin\alpha \neq 0$ 时，有

$$\lim_{t \to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)=\lim_{t \to 0} \frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}$$

$$=\lim_{t \to 0} \frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{0}{0+\sin^2\alpha}=0,$$

故 $\lim\limits_{t \to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0)$．

其次，设动点 $P(x, y)$ 沿抛物线 $y=x^2$ 趋于原点，得

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (y=x^2)}} f(x,\ y)=\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

因此，函数 $f(x, y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续．

3204. 证明：函数

$$f(x,y)=x\sin\frac{1}{y},\text{若 } y\neq 0 \text{ 及 } f(x,0)=0$$

的不连续点的集合不是封闭的.

证 当 $y_0\neq 0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 显见是连续的，即 $f(x,y)$ 在除去 Ox 轴以外的一切点均连续.

又因 $|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|\leqslant|x|$，故知 $f(x,y)$ 在原点也是连续的.

考虑当 $x_0\neq 0$ 时，对于点 $(x_0,0)$，由于极限

$$\lim_{y\to 0}f(x_0,y)=\lim_{y\to 0}x_0\sin\frac{1}{y}$$

不存在，故知 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,0)$ 不连续.

这样，我们证明了，函数 $f(x,y)$ 的全部不连续点为 Ox 轴上除去原点外的一切点.显然，原点是不连续点集合的一个聚点，但它本身却不是 $f(x,y)$ 的不连续点. 因此，$f(x,y)$ 的不连续点的集合不是封闭的.

3205. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在某域 G 内对变数 x 是连续的，而关于 x 对变数 y 是一致连续的，则此函数在所考虑的域内是连续的.

证 任意固定一点 $P_0(x_0,y_0)\in G$.

由于 $f(x,y)$ 关于 x 对变数 y 一致连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$，使当 $(x,y')\in G$，$(x,y'')\in G$ 且 $|y'-y''|<\delta_1$ 时，就有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于变数 x 是连续的，故对上述的 ε，存在 $\delta_2>0$，使当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时，就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $0<\delta\leqslant min\{\delta_1,\delta_2\}$，并使点 (x_0,y_0) 的 δ 邻域全部包含在区域 G 内，则当点 $P(x,y)$ 属于点 (x_0,y_0) 的 δ 邻域，即 $|PP_0|<\delta$ 时，

$$|x-x_0|<\delta\leqslant\delta_2,\quad |y-y_0|<\delta\leqslant\delta_1.$$

从而有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|$$
$$+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此，$f(x,y)$ 在点 P_0 连续．由 P_0 的任意性知，函数 $f(x,y)$ 在 G 内是连续的．

3206． 证明：若在某域 G 内函数 $f(x,y)$ 对变数 x 是连续的，并满足对变数 y 的里普什兹条件，即

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

式中 $(x,y')\in G$，$(x,y'')\in G$ 而 L 为常数，则此函数在已知域内是连续的．

证 由于 $f(x,y)$ 在 G 内满足对 y 的里普什兹条件，故知 $f(x,y)$ 在 G 内关于 x 对变数 y 是一致连续的．因此，由3205题的结果，即知 $f(x,y)$ 在 G 内是连续的．

3207． 证明：若函数 $f(x,y)$ 分别地对每一个变数 x 和 y 是

连续的并对于其中的一个是单调的，则此函数对两个变数的总体是连续的（尤格定理）．

证 不妨设 $f(x,y)$ 关于 x 是单调的．

设 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的定义域 G 内的任一点．由于 $f(x,y)$ 关于 x 连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$（假定 δ_1 足够小，使我们所考虑的点都落在 G 内），使当 $|x-x_0|\leqslant\delta_1$ 时，就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于点 $(x_0-\delta_1,y_0)$ 及 $(x_0+\delta_1,y_0)$，由于 $f(x,y)$ 关于 y 连续，故对上述的 ε，存在 $\delta_2>0$（也要求 δ_2 足够小，使所考虑的点落在 G 内），使当 $|y-y_0|<\delta_2$ 时，就有

$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

及

$$|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|\Delta x|<\delta$，$|\Delta y|<\delta$ 时，由于 $f(x,y)$ 关于 x 单调，故有

$$\begin{aligned}&|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\\&\leqslant max\{|f(x_0+\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|,\\&\qquad|f(x_0-\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\}.\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}&|f(x_0\pm\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\\&\leqslant|f(x_0\pm\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0\pm\delta_1,y_0)|\\&\qquad+|f(x_0\pm\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|\end{aligned}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故当$|\Delta x|<\delta$，$|\Delta y|<\delta$时，就有

$$|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon,$$

即$f(x,y)$在点(x_0,y_0)是连续的．由点(x_0,y_0)的任意性知，$f(x,y)$是G内的二元连续函数．

3208． 设函数$f(x,y)$于域$a\leqslant x\leqslant A$；$b\leqslant y\leqslant B$上是连续的，而函数叙列$\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在$[a,A]$上一致收敛并满足条件$b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$．证明：函数叙列

$$F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)] \quad (n=1,2,\cdots)$$

也在$[a,A]$上一致收敛．

证 由于$b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$，故$F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)]$有意义．

由题设$f(x,y)$在域$a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$上连续，故在此域上一致连续，即对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对于此域中的任意两点$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，只要$|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$时，就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

特别地，当$|y_1-y_2|<\delta$时，对于一切的$x\in[a,A]$，均有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon.$$

对于上述的$\delta>0$，因为$\varphi_n(x)$在$[a,A]$上一致收敛，故存在自然数N，使当$m>N$，$n>N$时，对于一切的$x\in[a,A]$，均有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|<\delta.$$

于是，对任给的$\varepsilon>0$，存在自然数N，使当$m>$

N，$n>N$时，对于一切的 $x\in[a,A]$，均有

$$|F_n(x)-F_m(x)|$$
$$=|f[x,\varphi_n(x)]-f[x,\varphi_m(x)]|<\varepsilon.$$

因此，$F_n(x)$在$[a,A]$上一致收敛.

3209. 设：1) 函数 $f(x,y)$于域 $R(a<x<A;\ b<y<B)$ 内是连续的；2) 函数 $\varphi(x)$于区间(a,A)内连续并有属于区间(b,B)内的值. 证明：函数

$$F(x)=f[x,\varphi(x)]$$

于区间(a,A)内是连续的.

证 设点(x_0,y_0)为域 R 中的任一点. 由题设知函数 $f(x,y)$于域 R 中连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$（$(x,y)\in R$）时，就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

再由 $\varphi(x)$在(a,A) 中的连续性可知，对上述的 $\delta>0$，存在$\eta>0$（可取 $\eta<\delta$），使当$|x-x_0|<\eta$（$x\in(a,A)$）时，恒有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|y-y_0|<\delta.$$

于是，

$$|f[x,\varphi(x)]-f[x_0,\varphi(x_0)]|<\varepsilon,$$

即

$$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon.$$

因此，$F(x)$ 在点 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知函数 $F(x)$在(a,A)内是连续的.

3210. 设：1)函数 $f(x,y)$于域 R（$a<x<A$；$b<y<B$）内是连续的；2) 函数 $x=\varphi(u,v)$及$y=\psi(u,v)$ 于域 R'

$(a'<u<A';\ b'<v<B')$ 内是连续的并有分别属于区间(a,A)和(b,B)的值．证明：函数

$$F(u,v)=f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]$$

于域 R' 内连续．

证 以下假定所取的 δ 或 η 足够小，使点的 δ 或 η 邻域都在所给的域内．

设点 (x_0,y_0)为域 R 中的任一点．由于 $f(x,y)$ 在 R 内连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$时，就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

再由 φ 及 ψ 的连续性知，对于上述的 δ，存在 $\eta>0$，使当$|u-u_0|<\eta$，$|v-v_0|<\eta$时，就有

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,$$

其中 $x_0=\varphi(u_0,v_0)$，$y_0=\psi(u_0,v_0)$．

于是，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使当$|u-u_0|<\eta$，$|v-v_0|<\eta$时，就有

$$|f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]-f[\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0)]|<\varepsilon,$$

即

$$|F(u,v)-F(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

因此，$F(u,v)$在点(u_0,v_0)连续，由(u_0,v_0)的任意性知，函数 $F(u,v)$于域 R' 内连续．

§2. 偏导函数．多变量函数的微分

1° **偏导函数** 若所论及的多变数的函数的一切偏导函

数是连续的，则微分的结果与微分的次序无关.

2° 多变量函数的微分 若自变数 x, y, z 的函数 $f(x, y, z)$ 的全增量可写为下形

$$\Delta f(x,y,z)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho),$$

式中 A, B, C 与 Δx, Δy, Δz 无关而 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，则称函数 $f(x,y,z)$ 可微分，而增量的线性主部 $A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$ 等于

$$df(x,y,z)=f'_x(x,y,z)dx+f'_y(x,y,z)dy+f'_z(x,y,z)dz, \tag{1}$$

(其中 $dx=\Delta x, dy=\Delta y, dz=\Delta z$) 称为此函数的微分.

当变数 x, y, z 为其他自变数的可微分的函数时，公式(1)仍有其意义.

若 x, y, z 为自变数，则对于高阶的微分，有符号公式

$$d^n f(x,y,z)=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z).$$

3° 复合函数的导函数 若 $w=f(x, y, z)$，其中 $x=\varphi(u, v)$，$y=\psi(u,v)$，$z=\chi(u,v)$ 且函数 φ, ψ, χ 可微分，则

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

计算函数 w 的二阶导函数时最好用下列符号公式：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 w+\frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z}$$

及 $$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x}+Q_2\frac{\partial}{\partial y}\right.$$

$$\left.+R_2\frac{\partial}{\partial z}\right)w+\frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

其中 $$P_1=\frac{\partial x}{\partial u},\ Q_1=\frac{\partial y}{\partial u},\ R_1=\frac{\partial z}{\partial u}$$

及 $$R_2=\frac{\partial x}{\partial v},\ Q_2=\frac{\partial y}{\partial v},\ R_2=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4° **在已知方向上的导函数** 若用方向余弦 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 表 $Oxyz$ 空间内的方向 l，且函数 $u=f(x,y,z)$ 可微分，则沿方向 l 的导函数按下式来计算

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

在已知点函数增加最迅速的速度之大小与方向用矢量——函数的梯度

$$\text{grad}\ u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

来表示，它的大小等于

$$|\text{grad}\ u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211. 证明：

$$f'_x(x,\ b)=\frac{d}{dx}[f(x,\ b)].$$

证 令 $\varphi(x)=f(x,b)$，则

$$\frac{d}{dx}[f(x,b)]=\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x}=f'_x(x,b).$$

注 在求某一固定点的导数及微分时，用本题的结果常可减少运算量．在本节中，我们就多次利用本题的结果来简化运算．

3212. 设：

$$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}},$$

求 $f'_x(x,\ 1)$．

解 由于 $f(x,1)=x$，故 $f'_x(x,1)=1$．

求下列函数的一阶和二阶偏导函数：

3213. $u=x^4+y^4-4x^2y^2$．

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-16xy^{*)}.$$

*) 以下各题不再写 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，而仅写 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，因为当它们连续时是相等的，并且在今后各题中均据

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$理解为$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

3214. $u = xy + \frac{x}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}.$$

3215. $u = \frac{x}{y^2}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{y^3}.$$

3216. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2x \cdot x}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{3}{2} y^2 \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} xy \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{x(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x d y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

3217. $u=x\sin(x+y)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\cos(x+y)+\cos(x+y)-x\sin(x+y)$$

$$=2\cos(x+y)-x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y).$$

3218. $u=\frac{\cos x^2}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x\sin x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos x^2}{y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2\cos x^2}{y^3}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2x\sin x^2}{y^2}.$$

3219. $u=\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{2x}{y}\cdot 2\sec^2\frac{x^2}{y}\cdot\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}\cdot\frac{2x}{y}$$

$$=\frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{8x^2}{y^2}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{y^3}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{2x^4}{y^4}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}-\frac{4x^3}{y^3}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y}$$

3220. $u=x^y$.

解 由 $u=x^y=e^{y\ln x}$即得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^{y\ln x}\cdot\ln x=x^y\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$$

$$=x^{y-1}(1+y\ln x)\quad (x>0).$$

3221. $u=\ln(x+y^2)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{x+y^2}-\frac{2y\cdot 2y}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

3222. $u=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

3223. $u=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$.

解 由776题知

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y-\varepsilon\pi,$$

其中 $\varepsilon=0$，1 或 -1．于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$

本题如不用776题的结果，直接求导数也可获解．例如，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}.$$

3224. $u=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\ ^{*)}$$

$$=\frac{|y|}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\left[-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]^{*)}$$

$$=-\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{|y|}=-\frac{x\,sgn\,y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{xy}{|y|(x^2+y^2)}\right]$$

$$=-\frac{x|y|(x^2+y^2)-xy\left[\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)+2y|y|\right]}{y^2(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)-2y|y|}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2 sgn\,y-y|y|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2-y^2)sgn\,y}{(x^2+y^2)^2}\quad(y\neq 0).$$

*) 利用3216题的结果.

3225. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

利用对称性，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

3226. $u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$.

解 $u=x^z y^{-z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=zx^{z-1}y^{-z}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-zx^zy^{-z-1}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=z(z-1)x^{z-2}y^{-z}=\frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(-z)(-z-1)x^zy^{-z-2}=\frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln^2\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(\frac{z}{x}u\right)'_y=\frac{z}{x}\left[-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\right]$$

$$=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\left(-\frac{z}{y}u\right)'_z=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$$

$$=-\frac{1+z\ln\frac{x}{y}}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\left(u\ln\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}+\frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$$

$$=\frac{1+z\ln\frac{x}{y}}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\quad\left(\frac{x}{y}>0\right).$$

3227. $u=x^{\frac{y}{z}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x=\frac{u\ln x}{z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x=-\frac{yu\ln x}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{xyz\frac{\partial u}{\partial x}-yzu}{x^2z^2}=\frac{y(y-z)u}{x^2z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\ln x}{z}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\ln^2 x}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-y\ln x\cdot\left[\frac{z^2\frac{\partial u}{\partial z}-2uz}{z^4}\right]$$

$$=\frac{yu\ln x\cdot(2z+y\ln x)}{z^4},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{xz}\left(u+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{u(z+y\ln x)}{xz^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\ln x\cdot\left(\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{u}{z^2}\right)$$

$$=-\frac{u\ln x\cdot(z+y\ln x)}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=-\frac{y}{z^2}\left(\ln x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{x}\right)=-\frac{yu(z+y\ln x)}{xy^3}.$$

3228. $u=x^{y^z}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}=\frac{u y^z}{x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z y^{z-1} x^{y^z}\ln x=z u y^{z-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z} y^z\ln x\cdot\ln y=u y^z\ln x\cdot\ln y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^z\left(-\frac{u}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{u y^z(y^z-1)}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=z\ln x\cdot\left[y^{z-1}\frac{\partial u}{\partial y}+(z-1)y^{z-2}u\right]$$

$$=u z y^{z-2}\ln x\cdot(z y^z\ln x+z-1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(y^z\frac{\partial u}{\partial z}+u y^z\ln y\right)\ln x\cdot\ln y$$

$$=u y^z\ln x\cdot\ln^2 y\cdot(1+y^z\ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}\left(y^z\frac{\partial u}{\partial y}+u z y^{z-1}\right)$$

$$=\frac{u z y^{z-1}(y^z\ln x+1)}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\left(y^{z-1}u+u z y^{z-1}\ln y+z y^{z-1}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\ln x$$

$$=u y^{z-1}\ln x\cdot[1+z\ln y\cdot(1+y^z\ln x)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = y^z \ln y \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \ln x + \frac{u}{x} \right)$$

$$= \frac{u y^z \ln y \cdot (y^z \ln x + 1)}{x} \quad (x > 0, y > 0).$$

3229. 设(a) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; (б) $u = x^{y^2}$; (в) $u = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$，验证等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

证 (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y$，$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x - 6y$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -2,$$

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

(б) $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2 - 1}$，$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yx^{y^2} \ln x \quad (x > 0)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2 - 1} + 2y^3 x^{y^2 - 1} \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2y^3 x^{y^2 - 1} \ln x + 2yx^{y^2 - 1},$$

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

(в) 当 $0<x\leqslant y$ 时，我们有

$$u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}=\arccos\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}=-\frac{1}{2\sqrt{x(y-x)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2y^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2(y-x)}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y^2(y-x)}}+\frac{\sqrt{x}}{4y(y-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

于是，当 $0<x\leqslant y$时，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

当 $y\leqslant x<0$ 时，$u=\arccos\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{-y}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{x-y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left[\frac{\sqrt{-x}}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\right]=-\frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{xy^2-y^3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{-x}\sqrt{xy^2-y^3}}+\frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{y^2}\ (x-y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

于是，当 $y\leqslant x<0$ 时，也有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

仔细观察可以看到，在不同的区域上，一阶偏导数相差一个符号，但二阶混合偏导数却是相等的。

3230. 设 $f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，若 $x^2+y^2\neq 0$ 及 $f(0,0)=0$．证明

$$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0).$$

证 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{x}=-y,$$

故，$f'_x(0,y)=-y$，从而

$$f''_{xy}(0,0)=\frac{d}{dy}\left[f'_x(0,\ y)\right]\bigg|_{y=0}=-1$$

同法可求得 $f'_y(x,0)=x$，从而

$$f''_{yx}(0,\ 0)=\frac{d}{dx}\left[f'_y(x,\ 0)\right]\bigg|_{x=0}=1.$$

于是，$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

3231. 设 $u=f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数，就下列各题验证关于齐次函数的尤拉定理：

(a) $u=(x-2y+3z)^2$；(б) $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；

(в) $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$.

证 关于 n 次齐次函数的尤拉定理如下：

设 n 次齐次函数 $f(x,y,z)$* 在域 A 中关于所有变量均有连续偏导函数，则下述等式成立

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,\ y,\ z)$$
$$=nf(x,y,z).$$

(a) 由于 $(tx-2ty+3tz)^2=t^2u$，故 u 为二次齐次函数．又因

---

* 为了书写的简便，在这里我们仅限于讨论三个变量的情形．

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x-2y+3z),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-4(x-2y+3z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=6(x-2y+3z),$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=(x-2y+3z)(2x-4y$$

$$+6z)=2u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

(б) 由于对任何的 $t>0$,

$$\frac{tx}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2+(tz)^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=t^0\cdot u,$$

故 u 为零次齐次函数.又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(xy^2$$

$$+xz^2-xy^2-xz^2)=0\cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

(в) 由于

$$\left(\frac{tx}{ty}\right)^{\frac{ty}{tz}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}=t^0\cdot u\ \ (t>0),$$

故函数 u 为零次齐次函数.又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(e^{\frac{y}{z}\ln\frac{x}{y}}\right)'_y\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\cdot\left[\frac{1}{z}\ln\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}\right]$$

$$=\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\ln\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y},$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=x\cdot\frac{yu}{xz}+y\cdot\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right)$$

$$-z\cdot\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y}=0\cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

3232. 证明：若可微函数 $u=f(x,y,z)$满足方程式

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu,$$

则它为 n 次齐次函数.

证 任意固定域中一点(x_0,y_0,z_0)，考察下面的 t 的函数$(t>0)$：

$$F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n},$$

它当 $t>0$ 时有定义且是可微的．应用复合函数的求导法则，对 t 求导数即得

$$F'(t)=\frac{1}{t^n}\Big\{x_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+y_0f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)+z_0f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)\Big\}-\frac{n}{t^{n+1}}f(tx_0,ty_0,tz_0)$$

$$=\frac{1}{t^{n+1}}\Big\{tx_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+ty_0\cdot f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)+tz_0f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)-nf(tx_0,ty_0,tz_0)\Big\},$$

由于 $tx_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+ty_0f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)+tz_0$

$$\cdot f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)=nf(tx_0,ty_0,tz_0),$$

故

$$F'(t)=0.$$

从而当 $t>0$ 时，$F(t)=c$，其中 c 为常数．现在确定 c．为此，在定义 $F(t)$ 的等式中令 $t=1$，则得

$$c=f(x_0,y_0,z_0).$$

于是，

$$F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n}=f(x_0,y_0,z_0),$$

即

$$f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^nf(x_0,y_0,z_0).$$

上式说明函数 $f(x,y,z)$为一个 n 次的齐次函数，这就是所要证明的.

3233. 证明：若 $f(x,y,z)$是可微分的 n 次齐次函数，则其偏导函数 $f_x'(x,y,z)$，$f_y'(x,y,z)$，$f_z'(x,y,z)$ 是 $(n-1)$次的齐次函数.

证 由等式

$$f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$$

两端分别对 x，y，z 求偏导函数，则得

$$tf_1'(tx,ty,tz)=t^nf_1'(x,y,z),$$

$$tf_2'(tx,ty,tz)=t^nf_2'(x,y,z),$$

$$tf_3'(tx,ty,tz)=t^nf_3'(x,y,z),$$

其中 $f_1'(\cdot,\cdot,\cdot)$，$f_2'(\cdot,\cdot,\cdot)$，$f_3'(\cdot,\cdot,\cdot)$ 分别代表 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$对第一个，第二个，第三个变量的偏导数.

于是，

$$f_1'(tx,ty,tz)=t^{n-1}f_1'(x,y,z),$$

$$f_2'(tx,ty,tz)=t^{n-1}f_2'(x,y,z),$$

$$f'_z(tx, ty, tz)=t^{n-1}f'_z(x,y,z),$$

即偏导函数 $f'_x(x,y,z)$，$f'_y(x,y,z)$ 及 $f'_z(x,y,z)$ 均为$(n-1)$次的齐次函数，

3234. 设 $u=f(x,y,z)$是可微分两次的 n 次齐次函数．证明

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=n(n-1)u.$$

证 由3233题知：$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial u}{\partial z}$均为$(n-1)$次齐次函数．应用尤拉定理，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (1)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (2)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (3)$$

将(1)式两端乘以 x，(2)式两端乘以y，(3)式两端乘以 z，然后相加，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=(n-1)\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=n(n-1)u,$$

这就是所要证明的等式．

求下列函数的一阶和二阶微分(x,y,z 为自变数):

3235. $u=x^m y^n$.

解 $du=x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx+nx\,dy)$,

$$d^2u=m(m-1)x^{m-2}y^n dx^2+2mnx^{m-1}y^{n-1}dxdy+n(n-1)x^n y^{n-2}dy^2$$
$$=x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2dx^2+2mnxydxdy+n(n-1)x^2dy^2].$$

3236. $u=\frac{x}{y}$.

解 $du=\frac{ydx-xdy}{y^2}$,

$$d^2u=\frac{y^2(dxdy-dxdy)-2ydy(ydx-xdy)}{y^4}$$
$$=-\frac{2}{y^3}(ydx-xdy)dy.$$

3237. $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

解 $du=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$d^2u=\frac{d(xdx+ydy)}{\sqrt{x^2+y^2}}+(xdx+ydy)\cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{dx^2+dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3238. $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解 $du=\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$,

$$d^2u=\frac{d(xdx+ydy)}{x^2+y^2}-\frac{2(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{dx^2+dy^2}{x^2+y^2}-\frac{2(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{(y^2-x^2)(dx^2-dy^2)-4xydxdy}{(x^2+y^2)^2}.$$

3239. $u=e^{xy}$.

解 $du=e^{xy}(ydx+xdy)$,

$d^2u=e^{xy}[(ydx+xdy)^2+2dxdy]$

$\quad=e^{xy}[y^2dx^2+2(1+xy)dxdy+x^2dy^2]$.

3240. $u=xy+yz+zx$.

解 $du=(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$,

$d^2u=2(dxdy+dydz+dzdx)$.

3241. $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

解 $du=-\dfrac{2z}{(x^2+y^2)^2}(xdx+ydy)+\dfrac{dz}{x^2+y^2}$

$$=\frac{(x^2+y^2)dz-2z(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$d^2u=\frac{1}{(x^2+y^2)^4}\Big\{(x^2+y^2)^2[2(xdx+ydy)dz$$

$$-2(xdx+ydy)dz-2z(dx^2+dy^2)]$$

$$-4(x^2+y^2)(xdx+ydy)[(x^2+y^2)dz$$
$$-2z(xdx+ydy)]\Big\}$$
$$=\frac{1}{(x^2+y^2)^3}\Big\{2z[(3x^2-y^2)dx^2+8xydxdy$$
$$+(3y^2-x^2)dy^2]-4(x^2+y^2)(xdx+ydy)dz\Big\}.$$

3242. 设 $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}$，求 $df(1,1,1)$ 及 $d^2f(1,1,1)$.

解 本题将采用分别先求一阶及二阶偏导函数，然后再合成以求一阶及二阶微分的方法．由于

$$f'_x(x,1,1)=1,\ f'_x(1,1,1)=1,$$

$$f'_y(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},\ f'_y(1,1,1)=-1,$$

$$f'_z(1,1,z)=0,\ f'_z(1,1,1)=0,$$

故得

$$df(1,1,1)=f'_x(1,1,1)dx+f'_y(1,1,1)dy$$

$$+f'_z(1,1,1)dz=dx-dy.$$

又因

$$f'_x(x,1,1)=1,\ f''_{xx}(x,1,1)=0,\ f''_{xx}(1,1,1)=0,$$

$$f'_x(1,y,1)=\frac{1}{y},\ f''_{xy}(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},$$

$$f''_{xy}(1,1,1)=-1,$$

$$f'_x(1,1,z)=\frac{1}{z},\ f'_{xz}(1,1,z)=-\frac{1}{z^2},$$

$$f''_{xz}(1,1,1)=-1,$$

$$f'_y(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},\ f''_{yy}(1,y,1)=\frac{2}{y^3},$$

$$f''_{yy}(1,1,1)=2,$$

$$f'_y(1,1,z)=-\frac{1}{z},\ f''_{yz}(1,1,z)=\frac{1}{z^2},$$

$$f''_{yz}(1,1,1)=1,$$

$$f'_z(1,1,z)=0, f''_{zz}(1,1,z)=0, f''_{zz}(1,1,1)=0,$$

故得

$$d^2f(1,1,1)=f''_{xx}(1,1,1)dx^2+f''_{yy}(1,1,1)dy^2$$

$$+f''_{zz}(1,1,1)dz^2+2f''_{xy}(1,1,1)dxdy$$

$$+2f''_{yz}(1,1,1)\,dydz+2f''_{xz}(1,1,1)dxdz$$

$$=2dy^2-2dxdy+2dydz-2dxdz$$

$$=2(dy-dx)(dy+dz).$$

3243．证明：若

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

则

$$d^2u \geqslant 0 .$$

证 $du = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{u}$,

$$d^2u = \frac{1}{u^2}[u(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (xdx$$

$$+ ydy + zdz)du]$$

$$= \frac{1}{u^3}[(xdy - ydx)^2 + (ydz - zdy)^2$$

$$+ (zdx - xdz)^2].$$

由于 $u > 0$（在原点处 du 不存在），故 $du \geqslant 0$。

3244. 假定 x，y 的绝对值甚小，对下列各式推出近似公式：

(a) $(1+x)^m(1+y)^n$；　(б) $\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)$；

(в) $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1+xy}$.

解 (a) 设 $f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n$，则

$$f'_x(x,0) = m(1+x)^{m-1},\ f'_x(0,0) = m,$$

$$f'_y(0,y) = n(1+y)^{n-1},\ f'_y(0,0) = n,$$

于是，

$$f(x,y) \approx f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y$$

$$= 1 + mx + ny,$$

即有近似公式

$$(1+x)^m(1+y)^n \approx 1+mx+ny.$$

(6) 设 $f(x,y)=\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)$，则

$$f'_x(x,0)=0,\ f'_x(0,0)=0,$$

$$f'_y(0,y)=0,\ f'_y(0,0)=0,$$

$$f''_{xx}(x,0)=0,\ f''_{xx}(0,0)=0,$$

$$f''_{yy}(0,y)=0,\ f''_{yy}(0,0)=0,$$

$$f'_x(0,y)=\ln(1+y),\ f''_{xy}(0,\ y)$$

$$=\frac{1}{1+y},\ f''_{xy}(0,0)=1.$$

于是，

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(0,0)x^2+2f''_{xy}(0,0)xy+f''_{yy}(0,0)y^2\right]$$

$$=xy,$$

即有近似公式

$$\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)\approx xy.$$

本题如不用求偏导函数的方法，也可直接获解：

$$\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)=[x+o(x)]\cdot[y+o(y)]$$

$\approx xy$.

(в) 设 $f(x, y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1+xy}$，则

$$f'_x(x, 0)=\frac{1}{1+x^2},\ f'_x(0, 0)=1,$$

$$f'_y(0,y)=\frac{1}{1+y^2},\ f'_y(0,0)=1.$$

于是，

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y=x+y,$$

即有近似公式

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y.$$

3245．用微分来代替函数的增量，近似地计算：

(a) $1.002\cdot2.003^2\cdot3.004^3$；(б) $\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98}\sqrt[4]{1.05^3}}$；

(в) $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$；　　(г) $\sin29^\circ\operatorname{tg}46^\circ$；

(д) $0.97^{1.05}$.

解　(a) 设 $f(x,y,z)=(1+x)^m(1+y)^n(1+z)^l$，则当$|x|$，$|y|$，$|z|$甚小时，有近似公式(参阅3244(a))

$$f(x,y,z)\approx1+mx+ny+lz.$$

利用上式即得

$$1.002\cdot2.003^2\cdot3.004^3=(1+0.002)$$

$$\cdot2^2\left(1+\frac{0.003}{2}\right)^2\cdot3^3\left(1+\frac{0.004}{3}\right)^3$$

$$\approx 1\cdot 2^2\cdot 3^3\left(1+0.002+2\cdot\frac{0.003}{2}+3\cdot\frac{0.004}{3}\right)$$

$$=108.972;$$

(б) $$\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98}\cdot\sqrt[4]{1.05^3}}=(1+0.03)^2$$

$$\cdot(1-0.02)^{-\frac{1}{3}}(1+0.05)^{-\frac{1}{4}}$$

$$\approx 1+2\cdot 0.03+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-0.02\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0.05$$

$$\approx 1.054;$$

(в) $$\sqrt{1.02^3+1.97^3}=(1.97)^{\frac{3}{2}}\left[1+\left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=2^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{0.03}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[1+\left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 2^{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{3}{2}\left(-\frac{0.03}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3\right]$$

$$\approx 2.95;$$

(г) 设 $f(x,y)=\sin x\ \mathrm{tg}\,y$，则有近似公式

$$f(x,y)\approx\sin x_0\,\mathrm{tg}\,y_0+\cos x_0\,\mathrm{tg}\,y_0\cdot(x-x_0)$$

$$+\frac{\sin x_0}{\cos^2 y_0}\cdot(y-y_0).$$

在本题中，令 $x_0=\frac{\pi}{6}$，$y_0=\frac{\pi}{4}$，$x-x_0=-\frac{\pi}{180}$，

$y-y_0=\frac{\pi}{180}$，即得

$$\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

$$\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)+\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

≈ 0.502;

(д) 设 $f(x,y)=x^y$，由于

$$f'_x(1,1)=\frac{d}{dx}f(x,1)\bigg|_{x=1}=1,$$

$$f'_y(1,1)=\frac{d}{dy}f(1,y)\bigg|_{y=1}=0,$$

于是，$x^y\approx x$. 所以，我们有

$$0.97^{1.05}\approx 0.97.$$

3246. 设矩形的边$x=6$米和 $y=8$米，若第一个边增加2毫米，而第二个边减少5毫米，问矩形的对角线和面积变化多少？

解 面积 $A=xy$，对角线 $l=\sqrt{x^2+y^2}$. 于是，

$$\Delta A\approx y\,dx+x\,dy,\quad \Delta l\approx\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

以 $x=6000$，$y=8000$，$dx=2$，$dy=-5$代入上述二式，即得

$\Delta A\approx 8000\cdot 2+6000\cdot(-5)=-14000$（平方毫米）$=-140$（平方厘米），

$$\Delta l \approx \frac{6000\cdot 2+8000\cdot(-5)}{\sqrt{6000^2+8000^2}} \approx -3 \text{（毫米）},$$

即对角线减少约3毫米，面积减少约140平方厘米。

3247. 扇形的中心角 $\alpha=60°$ 增加 $\Delta\alpha=1°$。为了使扇形的面积仍然不变，则应当把扇形的半径 $R=20$ 厘米减少若干？

解 扇形的面积 $A=\frac{1}{2}R^2\alpha$。于是，

$$\Delta A \approx dA = R\alpha dR + \frac{1}{2}R^2 d\alpha.$$

按题设，应有 $\Delta A=0$，即

$$20\cdot\frac{\pi}{3}dR+\frac{1}{2}\cdot 20^2\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0.$$

解之，得

$$dR \approx -\frac{1}{6} \text{（厘米）} \approx -1.7 \text{（毫米）},$$

即应当使半径减少约1.7毫米。

3248. 证明乘积的相对误差近似地等于乘数的相对误差的和。

证 设 $u=xy$，则 $du=xdy+ydx$，从而

$$\frac{du}{u}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}.$$

取绝对值，得

$$\left|\frac{du}{u}\right| \leqslant \left|\frac{dx}{x}\right| + \left|\frac{dy}{y}\right|,$$

上式各项均表示该量的相对误差，本题获证.

3249. 当测量圆柱的底半径 R 和高 H 时所得的结果如下：

$$R=2.5\text{米}\pm 0.1\text{米};\quad H=4.0\text{米}\pm 0.2\text{米},$$

则所计算出圆柱的体积可有怎样的绝对误差$\varDelta$和相对误差 δ？

解 体积$V=\pi R^2H$. 于是，

$\varDelta V\approx dV=2\pi RdR+\pi R^2dH$。

以$R=2.5$，$H=4.0$，$dR=0.1$，$dH=0.2$代入上式，即得

$$\varDelta V\approx 10.2\text{立方米},$$

$$\delta V=\left|\frac{\varDelta V}{V}\right|\approx 13\%.$$

3250. 三角形的边$a=200$米±2米，$b=300$米±5米，它们之间的角$C=60°\pm 1°$，则所计算出三角形的第三边 c 可有怎样的绝对误差？

解 按余弦定律，有

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

微分之，即得

$$cdc=ada+bdb-b\cos Cda-a\cos Cdb+ab\sin CdC.$$

以$a=200,b=300,c=\sqrt{200^2+300^2-2\cdot 200\cdot 300\cos 60°}$，

$C=\frac{\pi}{3}$，$da=2$，$db=5$，$dC=\frac{\pi}{180}$代入上式，即得

$$dc\approx 7.6\text{米},$$

故第三边 c 之绝对误差约为 7.6 米。

3251. 证明：在点(0,0)连续的函数

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$

于点(0,0)有两个偏导函数 $f'_x(0,0)$和$f'_y(0,0)$，但在点(0,0)并非可微分的.

说明导函数$f'_x(x, y)$和$f'_y(x,y)$在点(0, 0)的邻域中的性质.

解 $f'_x(0,0)=\dfrac{d}{dx}[f(x,0)]\Big|_{x=0}=0$，

$f'_y(0,0)=\dfrac{d}{dy}[f(0,y)]\Big|_{y=0}=0$.

考察极限

$$\lim_{\rho\to+0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to+0}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

当动点(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋于点(0,0) 时，显然对不同的 k 有不同的极限值$\dfrac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}$. 因此，上述极限不存在，即在点(0,0)，

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y$$

不能表成 $o(\rho)$，其中$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，故知$\sqrt{|xy|}$ 在点(0,0) 不可微分 .

不难得到

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{2x}, & x\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\\ \text{无意义}, & x=0, y\neq 0.\end{cases}$$

因此，$f'_x(x, y)$在点(0, 0)的任何邻域中均有无意义之点及无界，$f'_y(x,y)$的性质类似。

3252. 证明：函数

$$f(x, y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{若} x^2+y^2\neq 0 \text{及} f(0,0)=0,$$

于点(0,0)的邻域中连续且有有界的偏导函数$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$，但此函数于点(0,0)不能微分。

证 函数$f(x,y)$在$x^2+y^2\neq 0$的点显然是连续的。由不等式

$$|f(x, y)|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

知$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$，故$f(x, y)$在点(0,0)的邻域中连续。

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，由于

$$|f'_x(x,y)|\leqslant\frac{|y^3|}{(y^2)^{\frac{3}{2}}}=1,$$

故 $f'_x(x,y)$在点(0,0)的邻域内有界．同法可以证明 $f'_y(x,y)$在点(0,0)的邻域内有界．

由于$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，且极限

$$\lim_{\rho\to+0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-xf'_x(0,0)-yf'_y(0,0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to+0}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

是不存在的，因此可知函数$f(x,y)$在点(0，0)不可微分．

3253．证明：函数

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}，若x^2+y^2\neq 0$$

和 $f(0,0)=0$

于点(0,0)的邻域中有偏导函数$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$，这些偏导函数于点(0,0)是不连续的且在此点的任何邻域中是无界的；然而此函数于点(0,0)可微分．

证 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f'_x(x,y)$及$f'_y(x,y)$均存在，且

$$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f'_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

又因

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x^2}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$$

$$=\lim_{y\to0}y\sin\frac{1}{y^2}=0,$$

故知在点$(0,0)$内有偏导函数$f'_x(x,y)$及$f'_y(x,y)$.

考虑在点$\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},\ 0\right)$的偏导函数$f'_x(x,y)$:

$$f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},\ 0\right)=\frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\sin2n\pi-2\sqrt{2n\pi}\cos2n\pi$$

$$=-2\sqrt{2n\pi}\to-\infty\quad(n\to\infty),$$

因此，$f'_x(x,y)$在点$(0,0)$的任何邻域内无界，由此又知$f'_x(x,y)$在点$(0,0)$不连续．同法可证$f'_y(x,y)$在$(0,0)$的任何邻域中也无界，从而$f'_y(x,y)$在点$(0,0)$也不连续．

最后，我们证明$f(x, y)$在点$(0,0)$可微分。事实上，$f'_x(0, 0)=f'_y(0,0)=0$，且

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-xf'_x(0,0)-yf'_y(0,0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0,$$

故得

$$f(x, y)=f(0, 0)+xf'_x(0, 0)+yf'_y(0,0)+o(\rho),$$

即函数$f(x,y)$在点$(0,0)$可微分。

3254. 证明：于某凸形的域E内有有界偏导函数$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$的函数$f(x,y)$于域E内一致连续。

证 由于$f'_x(x, y)$及$f'_y(x, y)$在E内有界，故存在$L>0$，使当$(x,y)\in E$时，恒有

$$|f'_x(x, y)|\leqslant\frac{L}{2},$$

及
$$|f'_y(x, y)|\leqslant\frac{L}{2}.$$

在E内取两点$P_1(x_1, y_1)$及$P_2(x_2,y_2)$.

(1) 如果以$|P_1P_2|$为直径的圆(包括圆周在内)都属于E(图6-25)，则点$P_3(x_1, y_2)$及线段

P_1P_3、P_2P_3 都在 E 内。

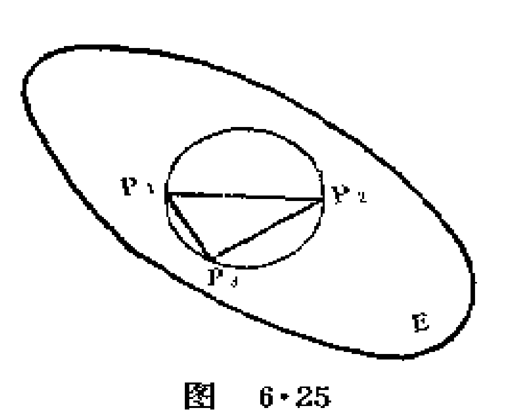


图 6·25

于是，

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant|f(x_1,y_1)-f(x_1,y_2)|+|f(x_1,y_2)-f(x_2,y_2)|$$

$$=|f'_y(x_1,\xi)|\cdot|y_1-y_2|+|f'_x(\eta,y_2)|\cdot|x_1-x_2|,$$

其中 ξ 介于 y_1，y_2之间，η 介于 x_1，x_2 之间. 由偏导函数的有界性，即得

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|$$

$$\leqslant\frac{L}{2}|y_1-y_2|+\frac{L}{2}|x_1-x_2|$$

$$\leqslant\frac{L}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$+\frac{L}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=L\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

或

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L\cdot|P_1P_2|.$$

(2) 如图 6·26 所示，$P_1\in E$，$P_2\in E$，但点(x_1,y_2)和(x_2,y_1)都不一定属于 E. 由于 P_1 和 P_2均为 E 的内点，故存在$R>0$，使得分别以P_1，P_2为

圆心，R 为半径的圆（包括圆周在内）都在 E 内．作两圆的外公切线 Q_1Q_4 及 Q_2Q_3，则由切点均在 E 内知，矩形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 整个落在 E 内．

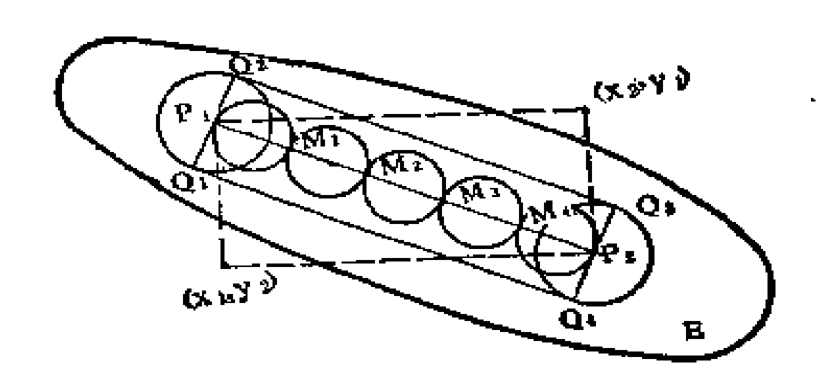


图 6·26

不难看出，在直线段 P_1P_2 上可取足够多的分点：$P_1=M_0$，M_1，M_2，…，$M_n=P_2$，使

$$|M_{k-1}M_k|<2R\ (k=1,2,\cdots,n),$$

则以 $|M_{k-1}M_k|$ 为直径的圆全落在矩形内，从而也在 E 内．于是，

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(M_k)-f(M_{k-1})|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}L\cdot|M_kM_{k-1}|=L\cdot\sum_{k=1}^{n}|M_kM_{k-1}|$$

$$=L\cdot|P_1P_2|.$$

这就证明了对 E 中任意两点，函数 $f(P)$ 满足里普什兹条件．

对于任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，则当 $P_1\in E$，P_2

$\in E$ 且 $|P_1P_2|<\delta$时，就恒有

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L\cdot|P_1P_2|<L\delta=\varepsilon,$$

即函数 $f(x, y)$在 E 中一致连续.

注. 用 ∂E 表区域 E 的边界，$\bar{E}$ 表 E 加上 ∂E 所成的闭区域. 在本题的假定下，还可证明 $f(x, y)$ 可开拓为 $\bar{E}$ 上的一致连续函数. 事实上，对 ∂E 上任一点 P_0 . 由柯西收敛准则知当点 P 从 E 内趋于 P_0 时 $f(P)$的极限 A 存在（根据 $f(P)$在 E 的一致连续性易知它满足柯西收敛准则）. 我们规定 $f(P_0)=A$. 于是 $f(P)$在整个 $\bar{E}$ 上有定义. 在不等式

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L\cdot|P_1P_2| \quad (P_1,P_2\in E)$$

两端让 $P_1\to P_0$ $(P_0\in\partial E)$ 取极限，得

$$|f(P_0)-f(P_2)|\leqslant L\cdot|P_0P_2|$$
$$(P_0\in\partial E,\ P_2\in E),$$

再让$P_2\to P'_0$ $(P'_0\in\partial E)$取极限，得

$$|f(P_0)-f(P'_0)|\leqslant L\cdot|P_0P'_0|$$

$$(P_0\in\partial E,\ P'_0\in\partial E).$$

由此可知，$f(P)$ 在 $\bar{E}$ 上满足里普什兹条件，从而 $f(P)$在 $\bar{E}$ 上一致连续.

3255. 证明：若函数 $f(x,y)$ 对变数 x 是连续的（对每一个固定的值 y）且有对变数y的有界的导函数$f'_y(x, y)$，则此函数对变数 x 和 y 的总体是连续的.

证 设 $P_0(x_0,y_0)$是所论的开域 E 中任一点.取以P_0

为中心的一个充分小的开球 G_0，使 G_0 完全含于 E 内。设在 G_0 内，有 $|f'_y(x, y)| \leqslant L$。于是，当 (x, y')，(x, y'') 属于 G_0 时，有

$$|f(x,y')-f(x,y'')| = |f'_y(x,\xi)|\cdot|y'-y''|$$
$$\leqslant L|y'-y''|,$$

其中 ξ 为介于 y'，y'' 之间的一数，故 $f(x, y)$ 在 G_0 中满足里普什兹条件．因此，根据 3206 题结果知 $f(x,y)$ 在 G_0 中连续，特别是在 P_0 点连续．由 P_0 点的任意性，即知 $f(x,y)$ 在 E 内连续，证毕．

注．从证明过程中很明显，本题只要假定 $f'_y(x,y)$ 在 E 中每一点的某邻域中有界即可．

在下列问题中求所指出的偏导函数：

6．$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$，$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$，$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$，若

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2 y - y^3 + x^4 - 4x^2 y^2 + y^4.$$

解 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + 6x - 6y + 12x^2 - 8y^2$，

$$\frac{\partial^3 u}{dx^3} = 6 + 24x.$$

于是，

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -16.$$

3257. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$，若$u=x\ln(xy)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\ln(xy)+1$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{x}$.

于是，

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=0.$$

3258. $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$，若$u=x^3\sin y+y^3\sin x$.

解 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=6\sin y+y^3\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$

$=6\sin y-y^3\cos x$.

于是，

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}=6\sin\left(y+\frac{3\pi}{2}\right)-6\cos x$$

$=-6(\cos y+\cos x)$.

3259. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$，若$u=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$.

解 注意到

$$u=\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y+\operatorname{arctg}z+\varepsilon\pi \quad (\varepsilon=0, \pm 1),$$

即得

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}=0.$$

3260. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$，若$u=e^{xyz}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=yze^{xyz}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=ze^{xyz}+xyz^2e^{xyz}$.

于是,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=e^{xyz}+xyze^{xyz}+2xyze^{xyz}$$

$$+x^2y^2z^2e^{xyz}=e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2).$$

3261. $\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}$, 若$u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$.

解 设 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, 则$u=-\ln r$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x-\xi}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2(x-\xi)(y-\eta)}{r^4},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial\xi}=-\frac{2(y-\eta)}{r^4}+\frac{8(x-\xi)^2(y-\eta)}{r^6}.$$

于是,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}=\frac{2}{r^4}-\frac{8(y-\eta)^2}{r^6}$$

$$-\frac{8(x-\xi)^2}{r^6}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$$

$$=-\frac{6}{r^4}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}.$$

3262. $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$, 若 $u=(x-x_0)^p(y-y_0)^q$.

解 $\frac{\partial^p u}{\partial x^p}=p!\cdot(y-y_0)^q$.

于是,

$$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}=p!\ q!\ (p,q\text{均为自然数}).$$

3263. $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$, 若$u=\frac{x+y}{x-y}$.

解 $u=1+\frac{2y}{x-y}$, $\frac{\partial^m u}{\partial x^m}=(-1)^m m!\frac{2y}{(x-y)^{m+1}}$. 利用求高阶导数的莱布尼兹公式，即得

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=(-1)^m\cdot 2(m!)\cdot\left\{y\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left[\frac{1}{(x-y)^{m+1}}\right]\right.$$

$$\left.+C_n^1\frac{\partial}{\partial y}(y)\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left[\frac{1}{(x-y)^{m+1}}\right]\right\}$$

$$=2\cdot(-1)^m m!\cdot\left\{\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)y}{(x-y)^{m+n+1}}\right.$$

$$\left.+\frac{n(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{(x-y)^{m+n}}\right\}$$

$$=\frac{2\cdot(-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}.$$

3264. $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$, 若$u=(x^2+y^2)e^{x+y}$.

解 $u=(x^2+y^2)e^{x+y}=x^2e^x\cdot e^y+y^2e^y\cdot e^x=u_1+u_2$.

显见$\frac{\partial^m u_2}{\partial x^m}=e^x\cdot y^2e^y$, 利用求高阶导数的莱布尼兹公

式，即得

$$\frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m u_2}{\partial x^m}\right)=\frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^x y^2 e^y)$$

$$=e^x\frac{\partial^n}{\partial y^n}(y^2e^y)=e^x\left\{y^2\frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^y)\right.$$

$$+C_n^1\frac{\partial}{\partial y}(y^2)\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}(e^y)$$

$$\left.+C_n^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2)\frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}}(e^y)\right\}$$

$$=e^{x+y}\{y^2+2ny+n(n-1)\}.$$

同法可求得

$$\frac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n}=e^{x+y}\{x^2+2mx+m(m-1)\}.$$

于是，

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n}+\frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n}$$

$$=e^{x+y}\{x^2+y^2+2mx+2ny+m(m-1)+n(n-1)\}.$$

3265⁺. $\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$，若 $u=xyze^{x+y+z}$。

解 $$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=\frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}(xe^x\cdot ye^y\cdot ze^z)$$

$$=\frac{\partial^p}{\partial x^p}(xe^x)\cdot\frac{\partial^q}{\partial y^q}(ye^y)\cdot\frac{\partial^r}{\partial z^r}(ze^z)$$

$$=e^x(x+p)\cdot e^y(y+q)\cdot e^z(z+r)$$
$$=e^{x+y+z}(x+p)(y+q)(z+r).$$

3266．若 $f(x,y)=e^x\sin y$，求 $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0)$。

解 $$f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0)=e^x\sin\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}=\sin\frac{n\pi}{2}.$$

3267．证明：若

$$u=f(xyz),$$

则

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=F(t),$$

式中 $t=xyz$，并求函数F。

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=yzf'(t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=yzf''(t)\cdot xz+zf'(t).$$

于是，

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2f'''(t)+2xyzf''(t)$$
$$+f'(t)+xyzf''(t)$$
$$=x^2y^2z^2f'''(t)+3xyzf''(t)+f'(t)$$
$$=t^2f'''(t)+3tf''(t)+f'(t)=F(t).$$

3268．设 $u=x^4-2x^3y-2xy^3+y^4+x^3-3x^2y-3xy^2+y^3$ $+2x^2-xy+2y^2+x+y+1$，求 d^4u。

导函数$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$，$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}$，$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$，$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}$和$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$等于甚么?

解 $d^4u=24\,dx^4-2C_4^1d^3(x^3)dy$

$-2C_4^1dxd^3(y^3)+24dy^4$

$=24(dx^4-2dx^3dy-2dxdy^3+dy^4)$.

由 $d^4u=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^4u$，得

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}=-12,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}=-12,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=24.$$

在下列各题中求所指出的阶的全微分：

3269. d^3u，若 $u=x^3+y^3-3xy(x-y)$.

解 $d^3u=6\,(dx^3+dy^3-3dx^2dy+3dxdy^2)$.

3270. d^3u，若 $u=\sin(x^2+y^2)$.

解 $du=2x\cos(x^2+y^2)dx+2y\cos(x^2+y^2)dy$

$=2(xdx+ydy)\cos(x^2+y^2)$

$d^2u=-4\sin(x^2+y^2)\cdot(xdx+ydy)^2$

$+2\cos(x^2+y^2)\cdot(dx^2+dy^2)$.

于是，

$d^3u=-8\cos(x^2+y^2)\cdot(xdx+ydy)^3$

$$-8\sin(x^2+y^2)\cdot(xdx+ydy)\cdot(dx^2+dy^2)$$
$$-4\sin(x^2+y^2)\cdot(xdx+ydy)\cdot(dx^2+dy^2)$$
$$=-8(xdx+ydy)^3\cos(x^2+y^2)$$
$$-12(xdx+ydy)(dx^2+dy^2)\sin(x^2+y^2).$$

3271. $d^{10}u$，若$u=\ln(x+y)$.

解 $du=\dfrac{dx+dy}{x+y}$. 于是，

$$d^{10}u=-\frac{9!(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}.$$

3272. d^6u，若 $u=\cos x\,\mathrm{ch}\,y$.

解 $d^6u=\left(dx\dfrac{\partial}{\partial x}+dy\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^6u$

$$=-\cos x\,\mathrm{ch}\,y\,dx^6-6\sin x\,\mathrm{sh}\,y\,dx^5dy$$
$$+15\cos x\,\mathrm{ch}\,y\,dx^4dy^2$$
$$+20\sin x\,\mathrm{sh}\,y\,dx^3dy^3-15\cos x\,\mathrm{ch}\,y\,dx^2dy^4$$
$$-6\sin x\,\mathrm{sh}\,y\,dxdy^5+\cos x\,\mathrm{ch}\,y\,dy^6$$
$$=-(dx^6-15dx^4dy^2+15dx^2dy^4$$
$$-dy^6)\cos x\,\mathrm{ch}\,y-2dxdy(3dx^4$$
$$-10dx^2dy^2+3dy^4)\sin x\,\mathrm{sh}\,y.$$

3273. d^3u，若 $u=xyz$.

解 注意到$d^2x=d^2y=d^2z=0$，即得

$$d^3u=d^3(xyz)=C_3^1dxd^2(yz)=3dx\cdot(C_2^1dydz)$$
$$=6dxdydz.$$

3274. d^4u，若 $u=\ln(x^xy^yz^z)$.

解 由于$u=x\ln x+y\ln y+z\ln z$，故

$$d^4u=(x\ln x)^{(4)}dx^4+(y\ln y)^{(4)}dy^4+(z\ln z)^{(4)}dz^4$$

$$=2\left(\frac{dx^4}{x^3}+\frac{dy^4}{y^3}+\frac{dz^4}{z^3}\right).$$

3275. d^nu，若$u=e^{ax+by}$.

解 注意到$d^2(ax+by)=0$，即得

$$d^nu=d^n(e^{ax+by})=e^{ax+by}[d(ax+by)]^n$$

$$=e^{ax+by}(adx+bdy)^n.$$

3276. d^nu，若$u=X(x)Y(y)$.

解 $$d^nu=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d^{n-k}X(x)\cdot d^kY(y)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k X^{(n-k)}(x)Y^{(k)}(y)dx^{n-k}dy^k,$$

3277. d^nu，若$u=f(x+y+z)$.

解 注意到$d^2(x+y+z)=0$，即得

$$d^nu=f^{(n)}(x+y+z)\cdot(dx+dy+dz)^n.$$

3278. d^nu，若$u=e^{ax+by+cz}$.

解 注意到$d^2(ax+by+cz)=0$，即得

$$d^nu=e^{ax+by+cz}(adx+bdy+cdz)^n.$$

3279. $P_n(x,y,z)$为n次齐次多项式．证明

$$d^nP_n(x,y,z)=n!P_n(dx,dy,dz).$$

证 $P_n(x,y,z)$可表示为形如

$$Ax^py^qz^r$$

的单项式之和，其中A为常数，p、q、r为非负整数，

且 $p+q+r=n$.

由于微分运算对加法及乘以常数是线性的（可交换的），因此要证

$$d^nP_n(x, y, z)=n!P_n(dx, dy, dz),$$

只要证明

$$d^n(x^py^qz^r)=n!dx^pdy^qdz^r$$

就可以了.事实上,

$$d^n(x^py^qz^r)=C_n^{p+q}d^{p+q}(x^py^q)\cdot d^r(z^r)$$

$$=\frac{n!}{r!(p+q)!}\{C_{p+q}^pd^p(x^p)d^q(y^q)\cdot d^r(z^r)\}$$

$$=\frac{n!}{r!(p+q)!}\cdot\frac{(p+q)!}{p!q!}\cdot p!q!r!dx^pdy^qdz^r$$

$$=n!dx^pdy^qdz^r.$$

3280．设:

$$Au=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}.$$

求 Au 和 $A^2u=A(Au)$，若

(а) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$;　　(б) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解　(а) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. 于是,

$$Au=\frac{x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}=-u,$$

$$A^2u=A(Au)=A(-u)=-Au=u.$$

(б) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$. 于是,

$$Au=\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}=1,$$

$$A^2u=A(Au)=0.$$

3281. 设:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

求 Δu, 若

(a) $u=\sin x \operatorname{ch} y$;　　　(б) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解 (a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sin x \operatorname{ch} y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin x \operatorname{ch} y$. 于是,

$$\Delta u=-\sin x \operatorname{ch} y+\sin x \operatorname{ch} y=0.$$

(б) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, 由对称性知 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. 于是,

$$\Delta u=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

3282. 设:

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

及

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

求 $\Delta_1 u$ 和 $\Delta_2 u$，若

(a) $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$；

(б) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解 (a) $\Delta_1 u=9\left[(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2\right]$,

$\Delta_2 u=6(x+y+z)$.

(б) 令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则$u=\frac{1}{r}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

由对称性即知

$$\Delta_1 u=\frac{x^2+y^2+z^2}{r^6}=\frac{1}{r^4}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\Delta_2 u=\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^6}\right)+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}\right)$$

$$+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}\right)=0.$$

求下列复合函数的一阶和二阶导函数：

3283. $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)$$

$$+4x^2f''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xyf''(x^2+y^2+z^2).$$

由对称性即知

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2zf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)$$

$$+4y^2f''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)$$

$$+4z^2f''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=4yzf''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=4xzf''(x^2+y^2+z^2).$$

3284. $u=f(x, \frac{x}{y})$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1\left(x, \frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}\left(x, \frac{x}{y}\right)+\frac{2}{y}f''_{12}\left(x, \frac{x}{y}\right)$$

$$+\frac{1}{y^2}f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^4}f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''_{12}\left(x, \frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right)$$

$$-\frac{x}{y^3}f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right)^{*)}.$$

*) f'_1, f'_2, f''_{11}, f''_{12}, f''_{22} 均系按其下标的次序分别对第一、第二个中间变量求导函数. 以下各题均同，不再说明.

3285. $u=f(x, xy, xyz)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1(x,xy,xyz)+yf'_2(x, xy, xyz)$

$$+yzf'_3(x,xy,xyz).$$

将 $f'_1(x,xy,xyz)$, $f'_2(x,xy,xyz)$, $f'_3(x,xy, xyz)$

简记为f'_1，f'_2，f'_3，以后不再说明．于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2+yzf'_3,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xf'_2+xzf'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xyf'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+yf''_{12}+yzf''_{13}+y\left(f''_{21}+yf''_{22}\right.$$

$$\left.+yzf''_{23}\right)+yz\left(f''_{31}+yf''_{32}+yzf''_{33}\right).$$

由于$f''_{12}=f''_{21}$，$f''_{13}=f''_{31}$，$f''_{23}=f''_{32}$（以下各题均同），故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+y^2f''_{22}+y^2z^2f''_{33}+2yf''_{12}$$

$$+2yzf''_{13}+2y^2zf''_{23}.$$

同法可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f''_{22}+x^2zf''_{23}+x^2zf''_{32}+x^2z^2f''_{33}$$

$$=x^2f''_{22}+2x^2zf''_{23}+x^2z^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=xf''_{12}+xzf''_{13}+f'_2+xyf''_{22}+xyzf''_{23}$$

$$+zf'_3+xyzf''_{32}+xyz^2f''_{33}$$

$$=xyf''_{22}+xyz^2f''_{33}+xf''_{12}+xzf''_{13}$$

$$+2xyzf''_{23}+f'_2+zf'_3.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}=xyf''_{13}+xy^2f''_{23}+xy^2zf''_{33}+yf'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}=x^2yf''_{23}+x^2yzf''_{33}+xf'_3.$$

3286．设 $u=f(x+y,xy)$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2$. 于是，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=f''_{11}+xf''_{12}+f'_2+yf''_{21}+xyf''_{22}$$

$$=f''_{11}+(x+y)f''_{12}+xyf''_{22}+f'_2.$$

3287．设 $u=f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$，求 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+2xf'_2$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+2xf''_{12}+2f'_2+2xf''_{21}+4x^2f''_{22}$$

$$=f''_{11}+4xf''_{12}+4x^2f''_{22}+2f'_2.$$

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''_{11}+4yf''_{12}+4y^2f''_{22}+2f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''_{11}+4zf''_{12}+4z^2f''_{22}+2f'_2.$$

于是,

$$\Delta u=3f''_{11}+4(x+y+z)f''_{12}$$

$$+4(x^2+y^2+z^2)f''_{22}+6f'_2.$$

求下列复合函数的一阶和二阶全微分（x,y 及 z 为自变量）：

3288. $u=f(t)$，其中 $t=x+y$.

解 $du=f'(t)(dx+dy)$，$d^2u=f''(t)(dx+dy)^2$.

3289. $u=f(t)$，其中 $t=\frac{y}{x}$.

解 $du=f'(t)\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}$,

$$d^2u=f''(t)\cdot\frac{(xdy-ydx)^2}{x^4}$$

$$-2f'(t)\cdot\frac{dx(xdy-ydx)}{x^3}.$$

3290. $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 $du=f'\cdot\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$d^2u=f''\cdot\frac{(xdx+ydy)^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3291. $u=f(t)$，其中 $t=xyz$.

解 $du=f'(t)(yzdx+xzdy+xydz)$,

$$d^2u=f''(t)(yzdx+xzdy+xydz)^2$$
$$+2f'(t)(zdxdy+ydxdz+xdydz).$$

3292. $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

解 $du=2f'\cdot(xdx+ydy+zdz)$,

$$d^2u=4f''\cdot(xdx+ydy+zdz)^2$$
$$+2f'\cdot(dx^2+dy^2+dz^2).$$

3293. $u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=ax$，$\eta=by$.

解 $du=af'_1dx+bf'_2dy$,

$$d^2u=a^2f''_{11}dx^2+2abf''_{12}dxdy+b^2f''_{22}dy^2.$$

3294. $u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=x+y$，$\eta=x-y$.

解 $du=f'_1\cdot(dx+dy)+f'_2\cdot(dx-dy)$,

$$d^2u=f''_{11}\cdot(dx+dy)^2+2f''_{12}\cdot(dx^2-dy^2)+f''_{22}\cdot(dx-dy)^2.$$

3295. $u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=xy$，$\eta=\frac{x}{y}$.

解 $du=f'_1\cdot(ydx+xdy)+f'_2\cdot\frac{ydx-xdy}{y^2}$,

$$d^2u=f''_{11}\cdot(ydx+xdy)^2+f''_{22}\cdot\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4}+2f''_{12}\cdot\frac{y^2dx^2-x^2dy^2}{y^2}+2f'_1\cdot dxdy-2f'_2\cdot\frac{(ydx-xdy)dy}{y^3}.$$

3296. $u=f(x+y,\ z)$.

解 $du=f'_1\cdot(dx+dy)+f'_2\cdot dz$,

$$d^2u=f''_{11}\cdot(dx+dy)^2+2f''_{12}\cdot(dx+dy)dz+f''_{22}dz^2.$$

3297. $u=f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$.

解 $du=f'_1\cdot(dx+dy+dz)+2f'_2\cdot(xdx$

$$+ydy+zdz),$$

$$d^2u=f''_{11}\cdot(dx+dy+dz)^2+4f''_{12}\cdot(dx+dy+dz)(xdx+ydy+zdz)+4f''_{22}\cdot(xdx+ydy+zdz)^2+2f'_2\cdot(dx^2+dy^2+dz^2).$$

3298. $u=f\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$.

解 $du=f'_1\cdot\frac{ydx-xdy}{y^2}+f'_2\cdot\frac{zdy-ydz}{z^2}$,

$$d^2u=f''_{11}\cdot\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4}+f''_{22}\cdot\frac{(zdy-ydz)^2}{z^4}+2f''_{12}\cdot\frac{(ydx-xdy)(zdy-ydz)}{y^2z^2}-2f'_1\cdot\frac{(ydx-xdy)dy}{y^3}-2f'_2\cdot\frac{(zdy-ydz)dz}{z^3}.$$

3299. $u=f(x,y,z)$，其中 $x=t,y=t^2,\ z=t^3$.

解 $du=(f'_1+2tf'_2+3t^2f'_3)dt$,

$$d^2u=(f''_{11}+4t^2f''_{22}+9t^4f''_{33}+4tf''_{12}+6t^2f''_{13}+12t^3f''_{23}+2f'_2+6tf'_3)dt^2.$$

3300. $u=f(\xi,\eta,\zeta)$，其中 $\xi=ax,\eta=by,\zeta=cz$.

解 $du=af'_1\cdot dx+bf'_2\cdot dy+cf'_3\cdot dz$,

$$d^2u=a^2f''_{11}\cdot dx^2+b^2f''_{22}\cdot dy^2+c^2f''_{33}\cdot dz^2$$

$$+2abf''_{12}\cdot dxdy+2acf''_{13}\cdot dxdz+2bcf''_{23}\cdot dydz.$$

3301. $u=f(\xi,\eta,\zeta)$，其中 $\xi=x^2+y^2$，$\eta=x^2-y^2$，$\zeta=2xy$.

解 $du=2f'_1\cdot(xdx+ydy)+2f'_2\cdot(xdx-ydy)$

$$+2f'_3\cdot(ydx+xdy),$$

$$d^2u=4f''_{11}\cdot(xdx+ydy)^2+4f''_{22}\cdot(xdx-ydy)^2$$

$$+4f''_{33}\cdot(ydx+xdy)^2+8f''_{12}\cdot(x^2dx^2-y^2dy^2)$$

$$+8f''_{13}\cdot(xdx+ydy)(ydx+xdy)$$

$$+8f''_{23}\cdot(xdx-ydy)(ydx+xdy)+2f'_1\cdot(dx^2$$

$$+dy^2)+2f'_2\cdot(dx^2-dy^2)+4f'_3\cdot dxdy.$$

求 d^nu，设：

3302. $u=f(ax+by+cz)$.

解 $d^nu=f^{(n)}(ax+by+cz)\cdot(adx+bdy+cdz)^n$.

3303. $u=f(ax,by,cz)$.

解 $d^n u=\left(a dx\frac{\partial}{\partial\xi}+b dy\frac{\partial}{\partial\eta}+c dz\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n f(\xi,\eta,\zeta)$，

其中 $\xi=ax$，$\eta=by$，$\zeta=cz$.

3304．$u=f(\xi,\eta,\zeta)$，其中 $\xi=a_1x+b_1y+c_1z$，
$\eta=a_2x+b_2y+c_2z$，$\zeta=a_3x+b_3y+c_3z$.

解
$$d^n u=\Big[(a_1dx+b_1dy+c_1dz)\frac{\partial}{\partial\xi}+(a_2dx+b_2dy+c_2dz)\frac{\partial}{\partial\eta}+(a_3dx+b_3dy+c_3dz)\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big]^n f(\xi,\eta,\zeta)$$
$$=\Big[dx\Big(a_1\frac{\partial}{\partial\xi}+a_2\frac{\partial}{\partial\eta}+a_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big)+dy\Big(b_1\frac{\partial}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial}{\partial\eta}+b_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big)+dz\Big(c_1\frac{\partial}{\partial\xi}+c_2\frac{\partial}{\partial\eta}+c_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big)\Big]^n f(\xi,\eta,\zeta).$$

3305．设 $u=f(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 和 f 为可微分两次的函数．证明：
$$\Delta u=F(r),$$
其中 $\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$，$\Delta$为拉普拉斯算子，

并求函数 F.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\cdot\frac{x}{r}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\cdot\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\cdot\frac{r^2-x^2}{r^3}.$$

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\cdot\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\cdot\frac{r^2-y^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)\cdot\frac{z^2}{r^2}+f'(r)\cdot\frac{r^2-z^2}{r^3}.$$

于是,

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{d x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)$$

$$+2f'(r)\cdot\frac{1}{r}=F(r).$$

3306．设 u 和 v 为可微分两次的函数而 Δ 为拉普拉斯算子（参阅3305题）．证明：

$$\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v),$$

其中 $\Delta(u,v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{dz}\frac{\partial v}{\partial z}$.

证 $\Delta(uv)=\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2}$

$$=\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dv}{\partial x}\right)$$

$$+\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$+\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v),$$

这就是所要证明的.

3307. 证明：函数

$$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

（a 和 b 为常数）满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

证 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}.$$

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}.$$

于是，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

3308. 证明：若函数 $u=u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程（参阅3307题），则函数

$$v=u\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

也满足这方程。

证　设 $\xi=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\eta=\frac{y}{x^2+y^2}$，则 $v(x,y)=u(\xi,\eta)$．从而

$$v''_{xx}=u''_{\xi\xi}\cdot(\xi'_x)^2+u''_{\eta\eta}\cdot(\eta'_x)^2+2u''_{\xi\eta}\cdot\xi'_x\eta'_x$$

$$+u'_\xi\cdot\xi''_{xx}+u'_\eta\cdot\eta''_{xx},$$

$$v''_{yy}=u''_{\xi\xi}\cdot(\xi'_y)^2+u''_{\eta\eta}\cdot(\eta'_y)^2+2u''_{\xi\eta}\cdot\xi'_y\eta'_y$$

$$+u'_\xi\cdot\xi''_{yy}+u'_\eta\cdot\eta''_{yy}.$$

由于

$$\xi'_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=-\eta'_y,\ \xi'_y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\eta'_x,$$

$$\xi''_{yy}=(\xi'_y)'_y=(\eta'_x)'_y=(\eta'_y)'_x=-\xi''_{xx},$$

$$\eta''_{yy}=(\eta'_y)'_y=(-\xi'_x)'_y=-(\xi'_y)'_x=-\eta''_{xx}$$

及

$$u''_{\xi\xi}(\xi,\eta)+u''_{\eta\eta}(\xi,\eta)=0,$$

故

$$\Delta v=v''_{xx}+v''_{yy}=u''_{\xi\xi}\cdot(\xi'_x)^2+u''_{\eta\eta}\cdot(\eta'_x)^2$$

$$+2u''_{\xi\eta}\cdot\xi'_x\eta'_x+u'_\xi\cdot\xi''_{xx}$$

$$+u'_\eta\cdot\eta''_{xx}+u''_{\xi\xi}\cdot(\eta'_x)^2+u''_{\eta\eta}\cdot(-\xi'_x)^2$$

$$+2u''_{\xi\eta}\cdot\eta'_x(-\xi'_x)+u'_\xi\cdot(-\xi''_{xx})+u'_\eta\cdot(-\eta''_{xx})$$

$$=(u''_{\xi\xi}+u''_{\eta\eta})\left[(\xi'_x)^2+(\eta'_x)^2\right]=0,$$

即函数 v 也满足拉普拉斯方程。

3309. 证明：函数

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$$

（a 和 b 为常数）满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证 $$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{8a^3t^2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}\cdot\left[(x-b)^2-2a^2t\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x-b}{4a^3t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{8a^5t^2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}\cdot\left[(x-b)^2-2a^2t\right].$$

将 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 比较即得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

即函数 u 满足热传导方程.

3310. 证明：若函数 $u=u(x,t)$满足热传导方程（参阅 3309 题），则函数

$$v=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u\left(\frac{x}{a^2t},\ -\frac{1}{a^4t}\right)\ (t>0)$$

也满足该方程.

证　设 $w=w(x,t)=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$，此函数即3309题中的函数 u 乘以 $2\sqrt{\pi}$，并令 $b=0$ 后得到. 因此，它满足热传导方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

显然有

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{2x}{4a^2t}w=-\frac{xw}{2a^2t}.$$

令 $\xi=\xi(x,t)=\frac{x}{a^2t}$，$\eta=\eta(t)=-\frac{1}{a^4t}$，则

$$\xi'_x=\frac{1}{a^2t},\xi''_{xx}=0,\ \xi'_t=-\frac{x^2}{a^2t^2},\eta'_t=\frac{1}{a^4t^2}.$$

由于 $v=w(x,t)\cdot u(\xi,\eta)$及$u'_\eta=a^2u''_{\xi\xi}$，故

$$v'_t = w'_t \cdot u + w \cdot (u'_\xi \cdot \xi'_t + u'_\eta \cdot \eta'_t)$$

$$= a^2 w''_{xx} \cdot u + w \cdot \left[u'_\xi \cdot \left(-\frac{x^2}{a^2 t^2} \right) + a^2 u''_{\xi\xi} \cdot \left(\frac{1}{a^4 t^2} \right) \right],$$

$$v'_x = w'_x \cdot u + w u'_\xi \cdot \xi'_x ,$$

$$v''_{xx} = w''_{xx} \cdot u + 2 w'_x \cdot u'_\xi \xi'_x + w u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + w u'_\xi \cdot \xi''_{xx}$$

$$= w''_{xx} \cdot u + 2\left(-\frac{xw}{2a^2 t} \right) u'_\xi \cdot \left(\frac{x}{a^2 t} \right) + w u''_{\xi\xi} \cdot \left(\frac{1}{a^2 t} \right)^2$$

$$= w''_{xx} \cdot u - \frac{x^2 w}{a^4 t^2} u'_\xi + \frac{w}{a^4 t^2} u''_{\xi\xi} .$$

将 v'_t 与 v''_{xx} 比较即得

$$v'_t = a^2 v''_{xx} ,$$

即函数 v 也满足热传导方程.

3311. 证明：函数

$$u = \frac{1}{r}$$

(式中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$) 当 $r \neq 0$ 时，满足拉普拉斯方程

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 .$$

证 本题证法与3282题(6)的证法完全类似，只要将该题中的 x,y,z 换成 $x-a$，$y-b$，$z-b$ 即可．事实上，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-a)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-b)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-c)^2}{r^5}.$$

将上述三式相加，即证得

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0.$$

3312．证明：若函数 $u=u(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程（参阅3311题），则函数

$$v=\frac{1}{r}u\left(\frac{k^2x}{r^2},\ \frac{k^2y}{r^2},\ \frac{k^2z}{r^2}\right)$$

（式中 k 为常数及 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）也满足该方程．

证 证法一

设 $S=S(x,y,z)=\frac{1}{r}$，则由3282题(6)知

$$\Delta S=S''_{xx}+S''_{yy}+S''_{zz}=0,$$

$$(S'_x)^2+(S'_y)^2+(S'_z)^2=\frac{1}{r^4}=S^4.$$

$$S'_x=-\frac{x}{r^3}=-S^3x,\ S'_y=-S^3y, S'_z=-S^3z.$$

记 $v=\frac{1}{r}u\left(\frac{k^2x}{r^2},\ \frac{k^2y}{r^2},\ \frac{k^2z}{r^2}\right)$

$$=Su(k^2S^2x,k^2S^2y,\ k^2S^2z)$$
$$=Sw(x,y,z,S)=F(x,y,z,S).$$

于是，

$$v'_x=F'_x+F'_S\cdot S'_x.$$

注意到 F'_x 和 F'_S 也是自变量 x,y,z 和中间变量 S 的函数，即得

$$v''_{xx}=F''_{xx}+2F''_{xS}\cdot S'_x+F''_{SS}\cdot(S'_x)^2+F'_S\cdot S''_{xx}.$$

由对称性得

$$v''_{yy}=F''_{yy}+2F''_{yS}\cdot S'_y+F''_{SS}\cdot(S'_y)^2+F'_S\cdot S''_{yy},$$

$$v''_{zz}=F''_{zz}+2F''_{zS}\cdot S'_z+F''_{SS}\cdot(S'_z)^2+F'_S\cdot S''_{zz}.$$

于是，

$$\Delta v=(F''_{xx}+F''_{yy}+F''_{zz})+F'_S\cdot(S''_{xx}+S''_{yy}+S''_{zz})$$

$$+\left\{2(F''_{xS}\cdot S'_x+F''_{yS}\cdot S'_y+F''_{zS}\cdot S'_z)\right.$$

$$\left.+F''_{SS}\cdot\left[(S'_x)^2+(S'_y)^2+(S'_z)^2\right]\right\}.$$

显然第二个括弧为零，也不难验证第一个括弧为零．事实上，

$$F''_{xx}+F''_{yy}+F''_{zz}=k^4S^5\cdot(u''_{11}+u''_{22}+u''_{33})=0\ .$$

现在来计算最后一个括弧．注意到

$$Sw'_S=2k^2S^2xu'_1+2k^2S^2yu'_2+2k^2S^2zu'_3$$

$$=2xw'_x+2yw'_y+2zw'_z\ ,$$

即得

$$F''_{SS}\cdot[(S'_x)^2+(S'_y)^2+(S'_z)^2]=(Sw)''_{SS}\cdot S^4$$

$$=(w+Sw'_S)'_S\cdot S^4$$

$$=(w+2xw'_x+2yw'_y+2zw'_z)'_S\cdot S^4$$

$$=S^4w'_S+2xS^4w''_{xS}+2yS^4w''_{yS}+2zS^4w''_{zS}. \tag{1}$$

而

$$2(F''_{xS}\cdot S'_x+F''_{yS}S'_y+F''_{zS}\cdot S'_z)$$

$$
\begin{aligned}
&=2(Sw)''_{xs}\cdot(-S^3x)+2(Sw)''_{ys}\cdot(-S^3y)\\
&\quad+2(Sw)''_{zs}\cdot(-S^3z)\\
&=-2S^3x\cdot(Sw'_x)'_s-2S^3y\cdot(Sw'_y)'_s-2S^3z\cdot(Sw'_z)'_s\\
&=-2S^3x\cdot(w'_x+Sw''_{xs})-2S^3y\cdot(w'_y\\
&\quad+Sw''_{ys})-2S^3z\cdot(w'_z+Sw''_{zs})\\
&=-S^3\cdot(2xw'+2yw'_y+2zw'_z)-2S^4w''_{xs}\\
&\quad-2yS^4w''_{ys}-2zS^4w''_{zs}\\
&=-S^4w'_s-2xS^4w''_{xs}-2yS^4w''_{ys}-2zS^4w''_{zs}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

比较(1)式和(2)式即知第三个括弧也为零．于是，最后证得

$$\varDelta v=0$$

证法二

本题也可直接求出$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$、$\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$，进而证得$\varDelta v=0$．事实上，设

$$\frac{k^2x}{r^2}=t_1,\quad \frac{k^2y}{r^2}=t_2,\quad \frac{k^2z}{r^2}=t_3,$$

利用 3306 题的结果即得

$$\Delta v=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2 u(t_1,t_2t_3)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(t_1,t_2,t_3)}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u(t_1,t_2,t_3)}{\partial z^2}\right]+u(t_1,t_2,t_3)\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$+2\left[\frac{\partial u(t_1,t_2,t_3)}{\partial x}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}+\frac{\partial u(t_1,t_2,t_3)}{\partial y}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}+\frac{\partial u(t_1,t_2,t_3)}{\partial z}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\right]. \qquad (1)$$

为书写简便起见，记 $u(t_1,t_2,t_3)=u$. 分别求 u 及 $\frac{1}{r}$ 对 x、y、z 的一阶偏导函数：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=k^2\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial t_1}\cdot\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_3}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=k^2\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial t_1}\cdot\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_3}\cdot\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=k^2\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial t_1}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_3}\cdot\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)\right];$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}.$$

从而得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\cdot\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_3}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)\right]\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_1}\cdot\left[\frac{-2xr^4-4xr^2(r^2-2x^2)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_1}\cdot\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\cdot\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_3}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_2}\cdot\left[\frac{-2yr^4-4xr^2(-2xy)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_1}\cdot\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_2}\cdot\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_3}\cdot\left[\frac{-2zr^4-4xr^2(-2xz)}{r^8}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=k^4\cdot\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\cdot\Big(-\frac{2xy}{r^4}\Big)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}$$

$$\cdot\Big(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\Big)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_3}\cdot\Big(-\frac{2yz}{r^4}\Big)\Big]\Big(-\frac{2xy}{r^4}\Big)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_1}\cdot\Big[\frac{-2xr^4-4yr^2(-2xy)}{r^8}\Big]$$

$$+k^4\cdot\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_1}\cdot\Big(-\frac{2xy}{r^4}\Big)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\cdot\Big(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\Big)$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_3}\cdot\Big(-\frac{2yz}{r^4}\Big)\Big]\Big(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\Big)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_2}\cdot\Big[\frac{-2yr^4-4yr^2(r^2-2y^2)}{r^8}\Big]$$

$$+k^4\cdot\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_1}\cdot\Big(-\frac{2xy}{r^4}\Big)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_2}$$

$$\cdot\Big(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\Big)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}\cdot\Big(-\frac{2yz}{r^4}\Big)\Big]\Big(-\frac{2yz}{r^4}\Big)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_3}\cdot\Big[\frac{-2zr^4-4yr^2(-2yz)}{r^8}\Big],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=k^4\cdot\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\cdot\Big(-\frac{2xz}{r^4}\Big)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}$$

$$\cdot\Big(-\frac{2yz}{r^4}\Big)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_3}\cdot\Big(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\Big)\Big]\Big(-\frac{2xz}{r^4}\Big)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_1}\cdot\Big[\frac{-2xr^4-4zr^2(-2xz)}{r^8}\Big]$$

$$+k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_1}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\cdot\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_3}\cdot\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_z}\cdot\left[\frac{-2yr^4-4zr^2(-2yz)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_1}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_2}\cdot\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}\cdot\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)\right]\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_3}\cdot\left[\frac{-2zr^4-4zr^2(r^2-2z^2)}{r^8}\right].$$

将$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$，$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}$，$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}$，$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}$，

及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$代入(1)式，合并整理，并注意到

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0\text{ 及 }\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}=0,$$

即得

$$\Delta v=\frac{1}{r}\left[\frac{k^4}{r^4}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}\right)\right.$$

$$-\frac{2k^2}{r^4}\cdot\left(x\frac{\partial u}{\partial t_1}+y\frac{\partial u}{\partial t_2}+z\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)$$

$$+0\cdot\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial t_i\partial t_j}\Big]+u\cdot 0+\frac{2k^2}{r^6}\Big(x\frac{\partial u}{\partial t_1}$$

$$+y\frac{\partial u}{\partial t_2}+z\frac{\partial u}{\partial t_3}\Big)=0,$$

上式说明函数 $v=v(x, y, z)$ 也满足拉普拉斯方程。

3313．证明：函数

$$u=\frac{C_1e^{-ar}+C_2e^{ar}}{r}$$

（式中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 及 C_1，C_2 为常数）满足爱尔木戈尔兹方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2u.$$

证 设

$$v=\frac{1}{r}e^{-ar},\ w=\frac{1}{r}e^{ar},$$

则有

$$u=C_1v+C_2w.$$

$$v'_x=v'_r\cdot r'_x=e^{-ar}\cdot\Big(-\frac{1}{r^2}-\frac{a}{r}\Big)\cdot\frac{x}{r}$$

$$=-xv\cdot\Big(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\Big),$$

$$v''_{xx}=-v'_x\cdot\Big(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\Big)x-v\cdot\Big(-\frac{2}{r^3}-\frac{a}{r^2}\Big)$$

$$\cdot\frac{x}{r}\cdot x-v\cdot\left(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\right)$$

$$=x^2v\cdot\left(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\right)^2+x^2v\cdot\frac{1}{r}$$

$$\cdot\left(\frac{2}{r^3}+\frac{a}{r^2}\right)-v\cdot\left(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\right)$$

$$=v\cdot\left[\left(\frac{3}{r^4}+\frac{3a}{r^3}+\frac{a^2}{r^2}\right)x^2-\frac{1}{r^2}-\frac{a}{r}\right].$$

利用对称性，即得

$$\Delta v=v\cdot\left[\left(\frac{3}{r^4}+\frac{3a}{r^3}+\frac{a^2}{r^2}\right)\cdot(x^2+y^2$$

$$+z^2)-\frac{3}{r^2}-\frac{3a}{r}\right]=a^2v.$$

记 $b=-a$，则 $w=\frac{1}{r}e^{-br}$. 仿上述证明，有

$$\Delta w=b^2w=a^2w.$$

于是，

$$\Delta u=\Delta(C_1v+C_2w)=C_1\Delta v+C_2\Delta w$$
$$=C_1a^2v+C_2a^2w=a^2u,$$

即

$$\Delta u=a^2u.$$

3314. 设函数 $u_1=u_1(x,y,z)$ 及 $u_2=u_2(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta u=0$. 证明：函数

$$v=u_1(x,y,z)+(x^2+y^2+z^2)u_2(x,y,z)$$

满足二重调和方程

$$\Delta(\Delta v)=0.$$

证 利用 3306 题的结果，即得

$$\Delta v=\Delta u_1+(x^2+y^2+z^2)\Delta u_2$$

$$+u_2\cdot\Delta(x^2+y^2+z^2)+2\left(2x\frac{\partial u_2}{\partial x}\right.$$

$$\left.+2y\frac{\partial u_2}{\partial y}+2z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)$$

$$=6u_2+4\left(x\frac{\partial u_2}{\partial x}+y\frac{\partial u_2}{\partial y}+z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right).$$

重复应用同一结果于 Δv，得

$$\Delta(\Delta v)=6\Delta u_2+4\left\{x\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+y\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right.$$

$$+z\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial u_2}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u_2}{\partial y}\Delta y$$

$$\left.+\frac{\partial u_2}{\partial z}\Delta z+2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)\right\}.$$

由于

$$\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_2)=0,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)=0,\quad \Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)=0,$$

故最后证得

$$\Delta(\Delta v)=0.$$

3315. 设 $f(x,y,z)$ 是可微分 m 次的 n 次齐次函数. 证明

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)$$

$$=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x,y,z).$$

证 证法一

根据齐次函数的定义知，函数 $f(x,y,z)$ 满足

$$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z). \qquad (1)$$

在(1)式两端分别对 t 求 m 次导数. 首先考察 $\frac{d^m f}{dt^m}$. 由求全导数的公式知

$$\frac{df}{dt}=x\frac{\partial f}{\partial(xt)}+y\frac{\partial f}{\partial(yt)}+z\frac{\partial f}{\partial(zt)}$$

$$=t^{n-1}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z),$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)=x\left\{x\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)^2}\right.$$

$$\left.+y\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(yt)}+z\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(zt)}\right\}$$

$$+y\left\{x\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(xt)}+y\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)^2}+z\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(zt)}\right\}$$

$$+z\left\{x\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(xt)}+y\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(yt)}+z\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)^2}\right\}$$

$$=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)^2}+z^2\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)^2}$$

$$+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(yt)}+2yz\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(zt)}$$

$$+2zx\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(xt)}$$

$$=t^{n-2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x,y,z).$$

一般地，由数学归纳法可得

$$\frac{d^m f}{dt^m}=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=m} C_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}\frac{\partial^m f}{\partial(xt)^{\alpha_1}\partial(yt)^{\alpha_2}\partial(zt)^{\alpha_3}}$$

$$\cdot x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}$$

$$=t^{n-m}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z), \qquad (2)$$

其中总和是关于$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=m$的非负整数$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$的一切可能组合而取的，且

$$C_{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3}=\frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}.$$

而(1)式右端对t求m次导数，得

$$[t^n f(x,y,z)]^{(m)}=n(n-1)\cdots(n-m+1)t^{n-m}f(x,y,z). \qquad (3)$$

比较(2)式和(3)式，令$t=1$，即证得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,\ y,\ z)$$

$$=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x, y, z).$$

证法二

当 $m=1$ 时，则由

$$f(tx, ty, tz)=t^n f(x, y, z)$$

两端对 t 求导，可得

$$x\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(tx)}+y\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(ty)}$$

$$+z\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(tz)}$$

$$=nt^{n-1}f(x,y,z)\quad(t>0).$$

令 $t=1$，即有

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^1 f=nf.$$

当 $m=2$时，由 3234 题的结果知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f=n(n-1)f.$$

在 3233 题中已证得 $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x, y, z)$,

$f'_z(x,y,z)$为$(n-1)$次的齐次函数.

今设 $m=k-1$ 时命题为真．对 f'_x，f'_y，f'_z 用数

学归纳法的假设，即

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_x$$

$$=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_x, \tag{4}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1}f'_y$$

$$=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_y, \tag{5}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1}f'_z$$

$$=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_z. \tag{6}$$

将(4)两端乘以 x，(5)式两端乘以 y，(6) 式两端乘以 z，然后相加，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k}f(x,y,z)$$

$$=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right.$$

$$\left.+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z)$$

$$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f(x,y,z).$$

即当 $m=k$ 时命题也为真。

于是，命题对于一切自然数 m 为真，即

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m}f$$

$$=n(n-1)\cdots(n-k+1)f.$$

3316. 若

$$z=\sin y+f(\sin x-\sin y),$$

其中 f 为可微分的函数．简化式子

$$\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 $\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}=\sec x\cos x\cdot f'$

$+\sec y\cdot(\cos y-\cos y\cdot f')$

$=f'+1-f'=1,$

即

$$\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

3317．证明：函数

$$z=x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

（其中 f 为任意的可微分函数）满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz.$$

证 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left\{nx^{n-1}f\left(\frac{y}{x^2}\right)\right.$

$\left.-\frac{2x^n y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x^2}\right)\right\}+2y\frac{x^n}{x^2}f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$

$=nx^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)=nz,$

即

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz.$$

3318．证明：

$$z=yf(x^2-y^2)$$

（其中 f 为任意的可微分函数）满足方程

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz.$$

证 $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=y^2\cdot 2xyf'+xy\cdot(f$

$-2y^2f')=xyf=xz,$

即

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz.$$

3319．若

$$u=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz$$

$$+f(y-x,\ z-x),$$

式中 f 为可微分的函数．简化式子

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2(y+z)+xyz-f'_1-f'_2,$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2z+f'_1,$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2y+f_2'.$$

将上述三式相加，即得

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=xyz.$$

3320. 设：

$$x^2=vw,\quad y^2=uw,\quad z^2=uv$$

及

$$f(x,\ y,\ z)=F(u,\ v,\ w).$$

证明：

$$xf_x'+yf_y'+zf_z'=uF_u'+vF_v'+wF_w'.$$

证 把 u，v，w 当作自变量*)，故

$$uF_u'=uf_x'\cdot x_u'+uf_y'\cdot y_u'+uf_z'\cdot z_u',$$

$$vF_v'=vf_x'\cdot x_v'+vf_y'\cdot y_v'+vf_z'\cdot z_v',$$

$$wF_w'=wf_x'\cdot x_w'+wf_y'\cdot y_w'+wf_z'\cdot z_w'.$$

将上述三式相加，得

$$uF_u'+vF_v'+wF_w'=(ux_u'+vx_v'+wx_w')f_x'$$

$$+(uy_u'+vy_v'+wy_w')f_y'+(uz_u'$$

$$+vz'_v+wz'_w)f'_z. \quad (1)$$

由题设得 $2x\frac{\partial x}{\partial u}=0$．因为 x 不恒等于零，所以$\frac{\partial x}{\partial u}=0$．同法可得$\frac{\partial y}{\partial v}=0$，$\frac{\partial z}{\partial w}=0$．

再由题设，得

$$2x\frac{\partial x}{\partial w}=v,\ 2x\frac{\partial x}{\partial v}=w,\ 2y\frac{\partial y}{\partial u}=w,$$

$$2y\frac{\partial y}{\partial w}=u,\ 2x\frac{\partial z}{\partial u}=v,\ 2x\frac{\partial z}{\partial v}=u.$$

将上述结果代入（1）式，得

$$uF'_u+vF'_v+wF'_w=\left(\frac{vw}{2x}+\frac{wv}{2x}\right)f'_x$$

$$+\left(\frac{uw}{2y}+\frac{wu}{2y}\right)f'_y+\left(\frac{uv}{2z}+\frac{vu}{2z}\right)f'_z$$

$$=xf'_x+yf'_y+zf'_z.$$

即

$$uF'_u+vF'_v+wF'_w=xf'_x+yf'_y+zf'_z.$$

*） 如果把 x，y，z 当作自变量，也可以证明本题的结果．

假定任意函数φ，ψ等等为可微分足够多次的函数，

验证下列等式：

3321. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$，若 $z=\varphi(x^2+y^2)$.

证 由于

$$y\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot 2x\varphi'(x^2+y^2),$$

$$x\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot 2y\varphi'(x^2+y^2),$$

所以

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

3322. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$，若 $z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$.

证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=x^2\cdot\left[-\frac{y^2}{3x^2}+y\varphi'(xy)\right]$

$$-xy\cdot\left[\frac{2y}{3x}+x\varphi'(xy)\right]+y^2=0.$$

3323. $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$，若 $z=e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

证 $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2-y^2)e^y\cdot\frac{x\varphi'}{y^2}ye^{\frac{x^2}{2y^2}}$

$$+xy\cdot\left\{e^y\cdot\varphi+e^y\varphi'\cdot\left[e^{\frac{x^2}{2y^2}}-\frac{x^2}{y^3}ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right]\right\}$$

$$=xye^y\varphi=xyz.$$

3324. $x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nu$，若 $u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x^\alpha},\ \frac{z}{x^\beta}\right)$.

证 $x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nx^n\varphi-\alpha x^{n-\alpha}y\varphi'_1$

$-\beta x^{n-\beta}z\varphi'_2+\alpha yx^{n-\alpha}\varphi'_1+\beta zx^{n-\beta}\varphi'_2$

$=nx^n\varphi=nu$.

3325. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$,若

$u=\frac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)$.

证 $x\frac{\partial u}{\partial x}=x\cdot\frac{y}{z}\ln x+\frac{xy}{z}+x\varphi-y\varphi'_1-z\varphi'_2$,

$y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xy}{z}\ln x+y\varphi'_1$, $z\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xy}{z}\ln x+z\varphi'_2$.

将上述三式相加，即得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}.$$

3326. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，若 $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$.

证 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\varphi''+a^2\psi''$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''+\psi''$.

将上述二式比较，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3327. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，若

$$u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y).$$

证 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi+y\psi'+x\varphi'$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x\varphi'+\psi+y\psi'$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\varphi'+y\psi''+x\varphi'', \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi'+\psi'+y\psi''+x\varphi'', \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x\varphi''+2\psi'+y\psi''. \qquad (3)$$

(1)－2×(2)＋(3)，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 .$$

3328. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，若

$$u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

证 $u_1=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$为零次齐次函数，$u_2=x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$为一次齐次函数．由 3234 题的结果（对于二元更成立）知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_1=0，\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_2=0.$$

于是，

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u_1+u_2)$$

$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_1+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_2$$

$$=0+0=0.$$

注. 也可不引用3234题的结果，求出偏导数直接验证。

3329. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)u$，若

$u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

证 $u_1=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$为 n 次齐次函数，$u_2=x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$

为 $1-n$ 次齐次函数. 由 3234 题的结果知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_1=n(n-1)u_1,$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_2=(1-n)(1-n-1)u_2$$

$$=n(n-1)u_2.$$

于是，

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u_1+u_2)$$

$$=n(n-1)(u_1+u_2)=n(n-1)u.$$

值得注意的是，3328题即为本题的特殊情形：$n=0$。

3330. $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，若 $u=\varphi[x+\psi(y)]$。

证 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''\psi'$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'\psi',\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''.$$

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

用逐次微分的方法消去任意函数 φ 和 ψ：

3331. $z=x+\varphi(xy)$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+y\varphi'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\varphi'$.

于是，

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x.$$

3332. $z=x\varphi\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi+\dfrac{x}{y^2}\varphi'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2x^2}{y^3}\varphi'$.

于是，

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2x\varphi+\frac{2x^2}{y^2}\varphi'-\frac{2x^2}{y^2}\varphi'$$

$$=2x\varphi=2z,$$

即

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

3333. $z=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x\varphi'}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y\varphi'}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

于是，

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

3334. $u=\varphi(x-y,y-z)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_1'$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\varphi_1'+\varphi_2'$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\varphi_2'$.

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

3335. $u=\varphi\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\varphi_1'$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\varphi_1'+\frac{1}{z}\varphi_2'$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\varphi_2'.$$

于是，

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0^{*)}.$$

*) 注意到$\varphi\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$为零次齐次函数，本题即3315题的特殊情形：$n=0$。

3336. $z=\varphi(x)+\psi(y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(x)$. 于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$$

3337. $z=\varphi(x)\psi(y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\psi$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi\psi'$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi'\psi'$.

于是，

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

3338. $z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'+\psi'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'-\psi'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\varphi''+\psi'',\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi''+\psi''.$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

3339. $z=x\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

解 注意到函数 z 为一次齐次函数，由3315题知

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

3340. $z=\varphi(xy)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

解 设 $z_1=\varphi(xy)$，则由3331题知

$$x\frac{\partial z_1}{\partial x}-y\frac{\partial z_1}{\partial y}=0.$$

又 $z_2=\psi\left(\frac{x}{y}\right)$为零次齐次函数，且函数

$$x\frac{\partial z_2}{\partial x}-y\frac{\partial z_2}{\partial y}=\frac{2x}{y}\psi'$$

也为零次齐次函数．从而，函数

$$u=x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x\frac{\partial z_1}{\partial x}-y\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)$$

$$+\left(x\frac{\partial z_2}{\partial x}-y\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)$$

是零次齐次函数．于是，由3315题知

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

但是，

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$+y\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$-y\frac{\partial z}{\partial y}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y},$$

故得

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

3341. 求函数

$$z=x^2-y^2$$

在点 $M(1,1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成角 $\alpha=60°$ 的方向 l 上的导函数.

解 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=2$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=-2$.

$$\cos\alpha=\cos 60°=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

于是，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=2\cdot\frac{1}{2}+(-2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}.$$

3342．求函数

$$z=x^2-xy+y^2$$

在点 $M(1,1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成 α 角的方向 l 上的导函数．在怎样的方向上此导函数有：(а) 最大的值；(б) 最小的值；(в) 等于 0．

解 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=1$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=1$．于是，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\cos\alpha+\cos(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha+\sin\alpha$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

(а) 当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l}$ 最大；

(б) 当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-1$，即 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l}$ 最小；

(в) 当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=0$，即 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\alpha=\frac{7\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l}=0$．

3343．求函数

$$z=\ln(x^2+y^2)$$

在点 $M_0(x_0,\ y_0)$ 沿与过此点的等位线成垂直的方向上的导数．

解 与等位线垂直的方向即梯度的方向或与梯度相反

的方向。于是，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\pm|grad\ z|\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$=\pm\sqrt{\left(\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2}\right)^2+\left(\frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)^2}=\pm\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

3344．求函数

$$z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

在点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$沿曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在此点的内法线方向上的导数。

解 曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$是函数$z$的一条等位线．随着$x,y$的绝对值增大，$z$是减少的，因此，曲线的内法线方向即梯度方向．于是，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\y=\frac{b}{\sqrt{2}}}}=|grad\,z|\Bigg|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\y=\frac{b}{\sqrt{2}}}}=\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}}\Bigg|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\y=\frac{b}{\sqrt{2}}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}\quad(a>0,b>0).$$

3345．求函数

$$u=xyz$$

在点 $M(1,1,1)$沿方向 $l\ \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ 上的导数．函数在该点的梯度的大小等于甚么？

解 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$

$$|grad\ u|\Big|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}$$
$$=\sqrt{3}.$$

3346．求函数

$$u=\frac{1}{r}$$

（式中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$） 在点 M_0 (x_0,y_0,z_0) 处梯度的大小和方向．

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{x}{r^3}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{y}{r^3}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{z}{r^3}$．于是，

$$grad\ u=-\frac{1}{r^3}\ (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

或简记成

$$grad\ u=\left\{-\frac{x}{r^3},\ -\frac{y}{r^3},\ -\frac{z}{r^3}\right\}.$$

在点 M_0 处的梯度为

$$grad\ u=\left\{-\frac{x_0}{r_0^3},\ -\frac{y_0}{r_0^3},\ -\frac{z_0}{r_0^3}\right\},$$

其中 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$．从而得

$$|grad\ u|=\sqrt{\left(-\frac{x_0}{r_0^3}\right)^2+\left(-\frac{y_0}{r_0^3}\right)^2+\left(-\frac{z_0}{r_0^3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{r_0^2},$$

$$\cos(grad\ u\widehat{\ }x)=\frac{-\frac{x_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}}=-\frac{x_0}{r_0},$$

$$\cos(grad\ u\widehat{\ }y)=\frac{-\frac{y_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}}=-\frac{y_0}{r_0},$$

$$\cos(grad\ u\widehat{\ }z)=\frac{-\frac{z_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}}=-\frac{z_0}{r_0}.$$

3347．求函数

$$u=x^2+y^2-z^2$$

在点 $A(\varepsilon,0,0)$ 及 $B(0,\varepsilon,0)$ 二点的梯度之间的角度.

解 $grad\ u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\left\{2x,2y,-2z\right\}$. 若以 $grad\ u_A$ 及 $grad\ u_B$ 分别表示在 A 点及 B 点的梯度，则有

$$grad\ u_A=\{2\varepsilon,0,0\},\quad grad\ u_B=\{0,2\varepsilon,0\}.$$

由于

$$grad\ u_A\cdot grad\ u_B=2\varepsilon\cdot 0+0\cdot 2\varepsilon+0\cdot 0=0,$$

故知

$$grad\ u_A\perp grad\ u_B,$$

即在点 A 及点 B 二点的梯度之间的夹角为

$$(\widehat{grad\ u_A, grad\ u_B})=\frac{\pi}{2}.$$

3348⁺. 在点 $M(1,2,2)$ 处，函数

$$u=x+y+z$$

的梯度之大小与函数

$$v=x+y+z+0.001\sin(10^6\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

的梯度之大小相差若干？

解 $grad\ u=\{1,1,1\}$，$|grad\ u|=\sqrt{3}$。

令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$$\frac{\partial v}{\partial x}=1+1000\pi\frac{x}{r}\cos(10^6\pi r),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=1+1000\pi\frac{y}{r}\cos(10^6\pi r),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=1+1000\pi\frac{z}{r}\cos(10^6\pi r).$$

在点 $M(1,2,2)$ 处，

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1000\pi}{3}+1\approx\frac{1000\pi}{3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2000\pi}{3}+1\approx\frac{2000\pi}{3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{2000\pi}{3}+1\approx\frac{2000\pi}{3},$$

$$|grad\ v|\approx1000\pi\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=1000\pi.$$

于是，两梯度之大小相差为

$$|grad\ v|-|grad\ u|\approx 1000\pi-\sqrt{3}\approx 3140.$$

3349．证明：在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处函数

$$u=ax^2+by^2+cz^2$$

及

$$v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$$

$(a,b,c,m,n,p$为常数且$a^2+b^2+c^2\neq 0)$二者的梯度之间的角度当点M_0无限远移时趋于零．

证 本题的题设条件"点$M_0(x_0,y_0,z_0)$无限远移"应理解为"$x_0\to\infty$，$y_0\to\infty$，$z_0\to\infty$同时成立"（此时$\sqrt{(ax_0)^2+(by_0)^2+(cz_0)^2}\to+\infty$），否则，本题的结论不成立．

显见有

$$grad\ u=\{2ax_0,2by_0,2cz_0\},$$

$$grad\ v=\{2ax_0+2m,2by_0+2n,2cz_0+2p\}.$$

令 $\alpha=ax_0,\beta=by_0,\gamma=cz_0$;

$$\alpha_1=ax_0+m=\alpha+m,\beta_1=by_0+n=\beta+n,\gamma_1=cz_0+p=\gamma+p.$$

于是，$grad\ u$与$grad\ v$的夹角θ满足

$$\cos\theta=\frac{\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}}$$

或

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$=\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-(\alpha\alpha_2+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

$$=\frac{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2+(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)^2+(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

$$=\frac{(n\alpha-m\beta)^2+(p\alpha-m\gamma)^2+(p\beta-n\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}.$$

令 $\delta=max(|ax_0|,|by_0|,|cz_0|)$

$=max(|\alpha|,|\beta|,|\gamma|)$，则

$\delta\leqslant\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\leqslant\sqrt{3}\delta$.

于是，当$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$时，$\delta\to+\infty$.

再令 $q=max(|m|,|n|,|p|)$，则下述不等式显然成立：

$$0\leqslant\sin^2\theta=\frac{(n\alpha-m\beta)^2+(p\alpha-m\gamma)^2+(p\beta-n\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

$$\leqslant\frac{(2q\delta)^2+(2q\delta)^2+(2q\delta)^2}{\delta^2(\delta^2-6\delta q-3q^2)}$$

$$=\frac{12q^2}{\delta^2-6\delta q-3q^2}\to 0 \text{（当}\delta\to+\infty\text{时）}.$$

于是，当$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$时，$\sin^2\theta\to 0$，即当$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$，$\theta\to0$. 证毕.

3350. 设 $u=f(x,y,z)$为可微分两次的函数.若$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为方向l的方向余弦，求$\frac{\partial^2u}{\partial l^2}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$,

$\frac{\partial^2u}{\partial l^2}=\Big(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cos\alpha+\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}\cos\beta+$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\cos\gamma\Big)\cos\alpha$$

$$+\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\cos\gamma\Big)\cos\beta$$

$$+\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\cos\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\cos\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos\gamma\Big)\cos\gamma$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos\alpha\cos\beta$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\cos\beta\cos\gamma+2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\cos\gamma\cos\alpha.$$

3351. 设 $u=f(x,y,z)$ 为可微分两次的函数及

$l_1\{\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1\}$, $l_2\{\cos\alpha_2,\cos\beta_2,\cos\gamma_2\}$.

$l_3\{\cos\alpha_3,\cos\beta_3,\cos\gamma_3\}$

为三个互相垂直的方向。证明：

(a) $$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

(б) $$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

证 (a) $$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_i+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_i+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_i\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i. \qquad (1)$$

由于 l_1, l_2, l_3 是互相垂直的三个单位矢量，
故

$$\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i=0,\quad \sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i=1,\quad \sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i=1,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i=1. \qquad (2)$$

将上述诸等式（2）代入（1）式，即得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

(6) 利用3350题的结果，得

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial l_i^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i. \tag{3}$$

将诸等式（2）代入（3）式，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3352. 设 $u=u(x,y)$为可微分的函数且当 $y=x^2$时有：

$$u(x,y)=1$$

及

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x.$$

求当 $y=x^2$ 时的$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 $\frac{d}{dx}u(x,x^2)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}$.

当 $y=x^2$，$u(x,y)=u(x,x^2)=1$，故$\frac{du(x,x^2)}{dx}=0$，且有$\frac{\partial u}{\partial x}=x$，$\frac{dy}{dx}=2x$. 将这些结果代入上式，即得

$$x+2x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

于是，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}$ （$x\neq 0$ ）.

3353. 设函数 $u=u(x,y)$满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

以及下列条件：

$$u(x,2x)=x, u'_x(x,2x)=x^2.$$

求：$u''_{xx}(x,2x)$, $u''_{xy}(x,2x)$, $u''_{yy}(x,2x)$.

解 由于 $u(x,2x)=x$，故

$$u'_x(x,2x)+2u'_y(x,2x)=1. \qquad (1)$$

又因 $u'_x(x,2x)=x^2$，故由（1）式即得

$$u'_y(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}. \qquad (2)$$

将（2）式两端对 x 求导数，有

$$u''_{yx}(x,2x)+2u''_{yy}(x,2x)=-x; \qquad (3)$$

由$u'_x(x,2x)=x^2$两端对 x 求导数，有

$$u''_{xx}(x,2x)+2u''_{xy}(x,2x)=2x. \qquad (4)$$

联立(3)式和(4)式并利用题设条件$u''_{xx}=u''_{yy}$，解之即得

$$u''_{xx}(x,2x)=u''_{yy}(x,2x)=-\frac{4}{3}x,$$

$$u''_{xy}(x,2x)=\frac{5}{3}x.$$

假定 $z=z(x,y)$，解下列方程：

3354. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(y)$，$z=x\varphi(y)+\psi(y)$.

3355. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi_1(x)$,

$$z=\int_0^x \varphi_1(t)dt+\psi(y)=\varphi(x)+\psi(y).$$

3356. $\dfrac{\partial^n z}{\partial y^n}=0$.

解 $\dfrac{\partial^{n-1}z}{\partial y^{n-1}}=\overline{\varphi}_{n-1}(x)$,

$$\frac{\partial^{n-2}z}{\partial y^{n-2}}=y\overline{\varphi}_{n-1}(x)+\overline{\varphi}_{n-2}(x),$$

累次积分 n 次，最后得

$$z=y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)+y^{n-2}\varphi_{n-2}(x)+\cdots$$
$$+y\varphi_1(x)+\varphi_0(x).$$

3357. 假定 $u=u(x,y,z)$解方程

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=0.$$

解 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi_1(x,y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_2(x,y)+\psi_1(x,z),$$

$$u=\varphi(x,y)+\psi(x,z)+\chi(y,z).$$

3358. 求方程

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$$

的满足条件 $z(x,x^2)=1$ 的解 $z=z(x,y)$.

解 由$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$得

$$z=x^2y+y^2+\varphi(x).$$

又因 $z(x,x^2)=1$，故

$$1=x^4+x^4+\varphi(x),$$

从而有

$$\varphi(x)=1-2x^4.$$

最后得

$$z=1+x^2y+y^2-2x^4.$$

3359. 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$$

的满足条件 $z(x,0)=1$，$z'_y(x,0)=x$ 的解 $z=z(x,y)$.

解 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y+\varphi(x).$$

又因 $z'_y(x,0)=x$，所以

$$x=0+\varphi(x) \text{ 或 } x=\varphi(x).$$

从而有

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y+x.$$

由此得

$$z=y^2+xy+\varphi_1(x).$$

又因 $z(x,0)=1$，故

$$1=0+0+\varphi_1(x) \text{ 或 } 1=\varphi_1(x).$$

最后得

$$z=1+xy+y^2.$$

3360．求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=x+y$$

的满足条件 $z(x,0)=x, z(0,y)=y^2$ 的解 $z=z(x,y)$。

解 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=x+y$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi_1(x),$$

$$z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\varphi(x)+\psi(y).$$

现确定 $\varphi(x)$ 及 $\psi(y)$。由于 $z(x,0)=x$，$z(0,y)=y^2$，故有

$$x=\varphi(x)+\psi(0),$$
$$y^2=\varphi(0)+\psi(y),$$

于是，

$$z=x+y^2+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2-[\varphi(0)+\psi(0)].$$

又因 $z(0,0)=0$，故 $\varphi(0)+\psi(0)=0$．最后得

$$z=x+y^2+\frac{1}{2}xy(x+y).$$

§3. 隐函数的微分法

1° 存在定理　设：1) 函数$F(x, y, z)$在某点$\widehat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$等于零；2) $F(x, y, z)$ 和 $F'_z(x, y, z)$在点$\widehat{A}_0$的邻域内有定义并且是连续的；3) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$，则在点 $A_0(x_0, y_0)$ 的某充分小的邻域内存在唯一的连续函数

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

满足方程　　$F(x, y, z) = 0$

而且是 $z_0 = f(x_0, y_0)$.

2° 隐函数的可微分性　设除了上面的条件外，4) 如果函数 $F(x, y, z)$ 在点$\widehat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$的邻域内可微分，则函数(1)在点 $A_0(x_0, y_0)$ 的邻域内也可微分并且它的导函数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$可从方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

求得．若函数 $F(x, y, z)$可微分任意多次，则用逐次微分方程（2）的方法也可计算函数 z 的高阶导函数．

3° 由方程组定义的隐函数　设函数 $F_i(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_n)(i = 1, 2, \cdots, n)$满足下列条件：

(1) 于点 $\widehat{A}_0(x_{10}, \cdots, x_{m0}; y_{10}, \cdots, y_{n0})$变成为零；

(2) 在点 $\widehat{A}_0$ 的邻域内可微分；

(3) 在点 $\widehat{A}_0$ 函数行列式$\dfrac{\partial(F_1, \cdots, F_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} \neq 0$.

在这种情况下，方程组

$$F_i(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)=0\ (i=1,2,\cdots,n) \qquad (3)$$

在点 $A_0(x_{10},\cdots,x_{m0})$ 的邻域内唯一地确定出一组可微分的函数：

$$y_i=f_i(x_1,\cdots,x_m)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

这些方程满足方程（3）及原始条件

$$f_i(x_{10},\cdots,x_{m0})=y_{i0}\ (i=1,2,\cdots n).$$

这些隐函数的微分可由方程组

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}dx_j+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}dy_k=0$$

$(i=1,2,\cdots,n)$* 求得。

3361．证明：在每一点都不连续的迪里黑里函数

$$y=\begin{cases}1, & \text{若}x\text{为有理数；}\\ 0, & \text{若}x\text{为无理数}\end{cases}$$

满足方程

$$y^2-y=0.$$

证 当 x 为有理数时，$y^2-y=1-1=0$；当 x 为无理数时，$y^2-y=0-0=0$．因此，不论 x 为任何实数 x，均有

$$y^2-y=0.$$

3362．设函数 $f(x)$ 定义于区间 (a,b) 内．问在怎样的情况下方程

$$f(x)y=0$$

---

* 这一段在简明陈述大多数的问题时无条件地假定隐函数和它们的对应导函数存在的条件满足。

当 $a<x<b$ 时才有唯一连续的解 $y=0$？

解 函数 $f(x)$ 的非零点的集合在区间 (a,b) 内是处处稠密的，即 $f(x)$ 的零点的集合不能充满区间 (a,b) 的任意一个子区间 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$．此时，方程 $f(x)y=0$ 有唯一连续的解 $y=0$．事实上，设 $y=y(x)$ 为方程 $f(x)y=0$ 的一个连续解，$x_0\in(a,b)$，则

(1) 当 $f(x_0)\neq0$ 时，显然有 $y(x_0)=0$；

(2) 当 $f(x_0)=0$ 时，由 $f(x)$ 的非零点的稠密性知：存在叙列 $\{x_n\}$，满足 $x_n\to x_0$ 及 $f(x_n)\neq0$ $(n=1,2,\cdots)$．于是，$y(x_n)=0$．由 $y(x)$ 的连续性即得

$$y(x_0)=y(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}y(x_n)=0.$$

于是，当 $a<x<b$ 时，$y\equiv0$．

反之，若方程 $f(x)y=0$ 在 (a,b) 只有唯一的连续解 $y=0$，则 $f(x)$ 的零点集必不能充满 (a,b) 的任何子区间．事实上，设在 (a,b) 的某子区间 (α,β) 上 $f(x)\equiv0$．定义 (a,b) 上的函数 $y_0(x)$ 如下：

$$y_0(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } a<x<\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4}\text{ 时；}\\ \dfrac{4}{\beta-\alpha}\left(x-\alpha-\dfrac{\beta-\alpha}{4}\right), & \\ \qquad\text{当 } \alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4}\leqslant x<\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\text{ 时；} & \\ -\dfrac{4}{\beta-\alpha}\left[x-\alpha-\dfrac{3(\beta-\alpha)}{4}\right], & \\ \qquad\text{当 } \alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\leqslant x\leqslant\alpha+\dfrac{3}{4}(\beta-\alpha)\text{ 时；} & \\ 0, & \text{当 } \alpha+\dfrac{3}{4}(\beta-\alpha)<x<b\text{ 时．}\end{cases}$$

如图6·27所示，图中$c_1=\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4}$，$c_0=\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{2}$，$c_2=\alpha+\dfrac{3(\beta-\alpha)}{4}$.

显然$y_0(x)\neq 0$，但$y=y_0(x)$是方程$f(x)y=0$在(a,b)上的一个连续解.

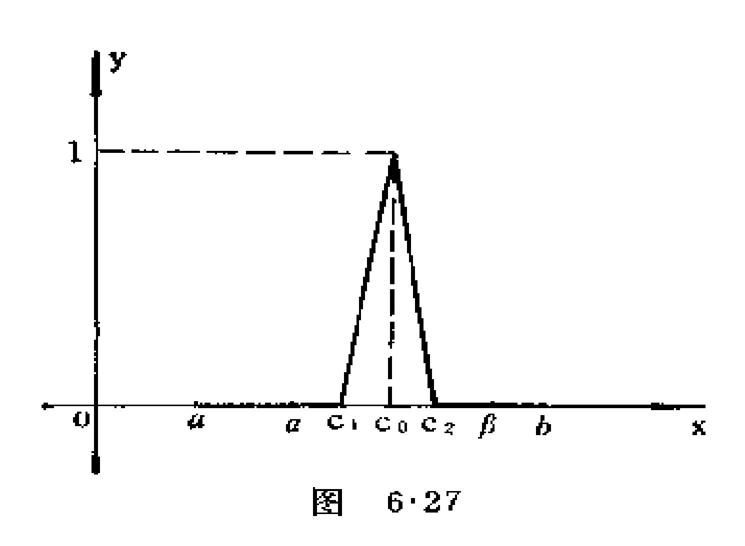


图 6·27

3363. 设函数$f(x)$和$g(x)$于区间(a,b)内有定义且连续．问在怎样的情况下，方程

$$f(x)y=g(x)$$

于区间(a,b)内才有唯一连续的解．

解 下面三个条件显然是必要的：

(1) $f(x)$的零点必须是$g(x)$的零点，否则y无解；

(2) $f(x)$的非零点集合必须在(a,b)内稠密．否则，存在$(\alpha,\beta)\subset(a,b)$，当$x\in(\alpha,\beta)$时，恒有$f(x)=g(x)=0$．从而当$x\in(\alpha,\beta)$时，任意改变原方程

一个连续解 $y(x)$ 的函数值（但保持连续性）就得出原方程的另一个连续解（参看3362题的图），此与原方程连续解的唯一性矛盾.

(3) 如果 $f(x_0)=0$，则对任一点列 $x_n\to x_0$，$f(x_n)\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)}{f(x_n)}=y_0 \text{（}y_0\text{ 是有限数且只与 }x_0\text{ 有关）}.$$

显然，如果上述极限不存在或对不同的序列取不同的值均导致y不连续.

反之，若上述三个条件满足，我们证明原方程的连续解存在唯一. 事实上，这时令

$$y_0(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{f(x)}, & \text{在}f(x)\neq 0\text{ 的点；}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(x_n)}{f(x_n)}, & \text{在}f(x)=0\text{的点，这里任取}\\ & x_n\to x,\ f(x_n)\neq 0\quad (n=1,2,\cdots).\end{cases}$$

易知 $y_0(x)$ 是 (a,b) 内的连续函数且满足原方程，即是原方程的一个连续解. 现若原方程在 (a,b) 内还有一连续解 $y=y_1(x)$，则

$$f(x)y_1(x)=g(x),\ f(x)y_0(x)=g(x)\ (a<x<b).$$

对任何 $x_0\in(a,b)$，若$f(x_0)\neq 0$，则$y_1(x_0)=\dfrac{g(x_0)}{f(x_0)}=y_0(x_0)$；若 $f(x_0)=0$，取 $x_n\to x_0, f(x_n)\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$，则根据 $y_1(x)$的连续性，得

$$y_1(x_0)=\lim_{n\to\infty}y_1(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)}{f(x_n)}=y_0(x_0).$$

于是，$y_1(x)\equiv y_0(x)$ $(a<x<b)$. 唯一性获证。

3364. 设已知方程

$$x^2+y^2=1 \qquad (1)$$

及

$$y=y(x) \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1) \qquad (2)$$

为满足方程（1）的单值函数.

1) 问有多少单值函数(2)满足方程(1)?

2) 问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)?

3) 设：(a) $y(0)=1$；(б) $y(1)=0$，问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)?

解 1) 无限个．例如，令

$$y_n(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, \text{当} -1\leqslant x\leqslant 1 \text{且} x\neq \frac{1}{n} \text{时}; \\ -\sqrt{1-x^2}, \text{当} x=\frac{1}{n} \text{时}\end{cases}$$

$$(n=1,2,3,\cdots),$$

则显然 $y=y_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 都是满足方程(1)的单值函数。

2) 二个：$y=-\sqrt{1-x^2}$ 及 $y=\sqrt{1-x^2}$.

3) (a)满足条件$y(0)=1$的仅 $y=\sqrt{1-x^2}$这一个连续函数；(б)满足条件$y(1)=0$ 的有$y=-\sqrt{1-x^2}$ 及 $y=\sqrt{1-x^2}$这二个连续函数。

3365. 设已知方程

$$x^2=y^2 \qquad (1)$$

及

$$y=y(x) \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad (2)$$

是满足方程（1）的单值函数.

1）问有多少单值函数(2)满足方程(1)?

2）问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)?

3）问有多少单值可微分的函数(2)满足方程(1)?

4）设：(a) $y(1)=1$；(б) $y(0)=0$，问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)?

5）设 $y(1)=1$ 及 δ 为充分小的数，问有多少单值连续函数 $y=y(x)$ $(1-\delta<x<1+\delta)$ 满足方程(1)?

解 1）无限个.例如，$y_n(x)=\begin{cases}|x|, & x\neq\frac{1}{n};\\ -|x|, & x=\frac{1}{n},\end{cases}$

$(n=1, 2, \cdots)$ 都是.

2）四个：$y=-x$，$y=x$，$y=|x|$ 和 $y=-|x|$.

3）二个：$y=-x$ 和 $y=x$.

4）(a) 二个：$y=x$ 和 $y=|x|$；(б) 四个：即 2）中之四个.

5）一个：$y=x$.

3366⁺. 方程

$$x^2+y^2=x^4+y^4$$

是定义 y 为 x 的多值函数. 问这个函数在怎样的域内，1)单值，2)有二个值，3)有三个值，4)有四个值? 求此函数的各枝点及它的单值连续的各枝.

解 由 $x^2+y^2=x^4+y^4$ 得 $y^4-y^2+(x^4-x^2)=0$.

解之，得 $y^2=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}$. 一共有单值连续

的六支，其中当$\frac{1}{4}+x^2-x^4\geqslant 0$即$|x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$时有二支：

$$y_1=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},\quad |x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}};$$

$$y_2=-\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},\quad |x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

而当$0\leqslant\frac{1}{4}+x^2-x^4\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2$即$1\leqslant x^2\leqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}$时有四支：

$$y_3=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},\quad 1\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}};$$

$$y_4=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},\quad -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\leqslant x\leqslant -1;$$

$$y_5=-\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},\quad 1\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}};$$

$$y_6=-\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},$$

$$-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\leqslant x\leqslant -1.$$

此外还有一个孤立点（0,0）（参看1542题的图形）。考虑上述六支的公共定义域知：

1）没有单值区域。

2）双值区域为$0<|x|<1$及$x=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

3）三值区域为 $x=0$ 及 $x=\pm 1$.

4）四值区域为 $1<|x|<\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

枝点的必要条件为

$$[y^4-y^2+(x^4-x^2)]'_y=0,$$

即

$$4y^3-2y=0.$$

于是，

$$y=0 \text{ 及 } y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由 $y=0$ 解得 $x=0$ 及 $x=\pm 1$；而由 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 解得 $x=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$. 经验证，得六个枝点：

$$(-1,0),\ (1,0),\ \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

3367. 求由方程

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$$

所定义的多值函数 y 的各枝点和单值连续的各枝 $y=y(x)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

解 由 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 得

$$y^2=\frac{-(1+2x^2)\pm\sqrt{8x^2+1}}{2}.$$

因为当$|x|\leqslant 1$时，$\sqrt{8x^2+1}\geqslant 1+2x^2$，故单值连续的各枝为（共有四枝）

$$y=\varepsilon(x)\sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1}-(1+2x^2)}{2}}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

其中$\varepsilon(x)$分别为1，-1，$sgnx$，$-sgnx$.

下面再求枝点：

$$\left[(x^2+y^2)^2-x^2+y^2\right]'_y=2(x^2+y^2)\cdot 2y+2y=0,$$

解之得$y=0$，从面得$x=0$及$x=\pm 1$. 经验证得枝点为

$$(0,\ 0),\ (1,\ 0)及(-1,\ 0).$$

3368．设函数$f(x)$当$a<x<b$时连续，并且函数$\varphi(y)$当$c<y<d$时单调增加而且连续．问在怎样的条件下方程

$$\varphi(y)=f(x)$$

定义出单值函数

$$y=\varphi^{-1}[f(x)]?$$

研究例子：(a)$\sin y+\operatorname{sh}y=x$；(б)$e^{-y}=-\sin^2 x$.

解 根据$\varphi(y)$的严格增加性以及$\varphi(y)$、$f(x)$的连续性可知，若存在(x_0,y_0)满足$\varphi(y_0)=f(x_0)$，则在x_0近旁由方程$\varphi(y)=f(x)$可唯一地确定y为x的单值连续函数

$$y=\varphi^{-1}[f(x)]\ (满足y_0=\varphi^{-1}[f(x_0)])\ ;\qquad(1)$$

若更设满足不等式

$$\lim_{y\to c+0}\varphi(y)<f(x)<\lim_{y\to d-0}\varphi(y)\quad(a<x<b),\qquad(2)$$

则显然函数(1)是整个$a<x<b$上定义的连续函数.

(a) 设$\varphi(y)=\sin y+\operatorname{sh}y\ (-\infty<y<+\infty)$,

$f(x)=x\quad(-\infty<x<+\infty)$.由于$\varphi'(y)=\cos y+\operatorname{ch} y>0\ (-\infty<y<+\infty)$，故$\varphi(y)$是$-\infty<y<+\infty$上的严格增函数，又显然有

$$\lim_{y\to-\infty}\varphi(y)=-\infty,\quad \lim_{y\to+\infty}\varphi(y)=+\infty,$$

故不等式(2)满足．于是，由方程$\sin y+\operatorname{sh} y=x$唯一确定$y$为$x$的连续函数，它定义在整个数轴：$-\infty<x<+\infty$上．

(6) $\varphi(y)=e^{-y}$及$f(x)=-\sin^2 x$虽然也满足题设条件，但此方程是矛盾的($e^{-y}>0$，$-\sin^2 x\leqslant 0$)，即不存在点(x_0, y_0)，使有$e^{-y_0}=-\sin^2 x_0$．因此，不能定义y为x的单值函数．

3369．设：

$$x=y+\varphi(y), \tag{1}$$

其中$\varphi(0)=0$且当$-a<y<a$时$\varphi'(y)$连续并满足$|\varphi'(y)|\leqslant k<1$．证明：当$-\varepsilon<x<\varepsilon$时存在唯一的可微分函数$y=y(x)$满足方程(1)且$y(0)=0$．

证 设$F(x,y)=x-y-\varphi(y)$，则

1) 由于$\varphi(0)=0$，故$F(0,0)=0$；

2) 当$-\infty<x<+\infty$，$-a<y<a$时，$F(x,y)$，$F'_x(x,y)$及$F'_y(x,y)=-1-\varphi'(y)$均连续；

3) $F'_y(0,0)=-1-\varphi'(0)<0$，当然$F'_y(0,0)\neq 0$．

于是，由隐函数的存在及可微性定理知：存在$\varepsilon>0$，使当$-\varepsilon<x<\varepsilon$时，存在唯一的可微分函数$y=y(x)$满足方程$x=y+\varphi(y)$及$y(0)=0$．

3370．设$y=y(x)$为由方程

$$x=ky+\varphi(y)$$

所定义的隐函数，其中常数 $k\neq 0$ 且$\varphi(y)$为以ω 为周期的可微周期函数，且$|\varphi'(y)|<|k|$. 证明

$$y=\frac{x}{k}+\psi(x),$$

其中 $\psi(x)$为以$|k|\omega$为周期的周期函数.

证 由于 $x=ky+\varphi(y)$，故$\frac{dx}{dy}=k+\varphi'(y)$. 又因$|\varphi'(y)|<|k|$，故$\frac{dx}{dy}$与$k$同号，即 x 为 y 的严格单调函数，且为连续的. 由于 $\varphi(y)$ 是连续的以 ω 为周期的函数，故有界，从而当 $k>0$ 时，

$$\lim_{y\to-\infty}x=-\infty,\ \lim_{y\to+\infty}x=+\infty;$$

当 $k<0$ 时，

$$\lim_{y\to-\infty}x=+\infty,\ \lim_{y\to+\infty}x=-\infty;$$

由此可知，其反函数 $y=y(x)$ 存在唯一，且是$-\infty<x<+\infty$上有定义的严格单调可微函数. 令

$$y(x)-\frac{x}{k}=\psi(x)\quad(-\infty<x<+\infty),\tag{1}$$

则由 $x=ky(x)+\varphi[y(x)]$，$\varphi[y(x)+\omega]=\varphi[y(x)]$知 $x+k\omega=ky(x)+\varphi[y(x)]+k\omega=k[y(x)+\omega]+\varphi[y(x)+\omega]$. 从而，根据反函数的唯一性，得

$$y(x+k\omega)=y(x)+\omega\ (-\infty<x<+\infty).\tag{2}$$

由（1）式与（2）式，得

$$\psi(x+k\omega)=y(x+k\varphi)-\frac{x+k\omega}{k}=y(x)-\frac{x}{k}$$

$$=\psi(x)\ (-\infty<x<+\infty).$$

同理可证

$$\psi(x-k\omega)=\psi(x)\ (-\infty<x<+\infty),$$

故 $\psi(x)$是以$|k|\omega$为周期的可微周期函数．由(1)得

$$y=y(x)=\frac{1}{k}x+\psi(x).$$

证毕．

对于由下列各方程式所定义的函数 y， 求出 y' 和 y''：

3371．$x^2+2xy-y^2=a^2$．

解 用求导数及微分两种方法解之．

解法一

等式两端分别对 x 求导数，得

$2x+2y+2xy'-2yy'=0$，

故有

$$y'=\frac{y+x}{y-x}.$$

再对上式求导数，得

$$y''=\frac{(y-x)(y'+1)-(y+x)(y'-1)}{(y-x)^2}$$

$$=\frac{2y-2xy'}{(y-x)^2}=\frac{2y(y-x)-2x(y+x)}{(y-x)^3}$$

$$=\frac{2(y^2-2xy-x^2)}{(y-x)^3}=-\frac{2a^2}{(y-x)^3}=\frac{2a^2}{(x-y)^3}.$$

解法二

等式两端分别微分，得

$$2xdx+2xdy+2ydx-2ydy=0, \tag{1}$$

故有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{y-x}.$$

对(1)式两端再微分一次，并注意 $d^2x=0$，得

$$dx^2+2dxdy-dy^2+(x-y)d^2y=0,$$

故有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+2\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y-x}=\frac{1+\frac{2(y+x)}{y-x}-\left(\frac{y+x}{y-x}\right)^2}{y-x}$$

$$=\frac{2a^2}{(x-y)^3}.$$

3372. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

解 解法一

等式两端对 x 求导数，得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2}.$$

解之即得

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

将上式再对 x 求导数，得

$$y''=\frac{(x-y)(1+y')-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{2(xy'-y)}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{2x(x+y)-2y(x-y)}{(x-y)^3}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

解法二

等式两端分别微分，得

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

解之即得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

对 $xdx+ydy=xdy-ydx$ 再微分一次，得

$$dx^2+dy^2+yd^2y=xdy^2,$$

故有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x-y}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$$=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x-y)^3}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

以下各题根据情况采用直接求导法或微分法.

3373. $y-\varepsilon\sin y=x\quad(0<\varepsilon<1)$.

解 等式两端对 x 求导数，得

$$y'-\varepsilon y'\cos y=1,$$

故有

$$y'=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$$

将上式再对 x 求导数，得

$$y''=-\frac{\varepsilon y'\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^2}=-\frac{\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}.$$

3374. $x^y=y^x$ $(x\neq y)$。

解 取对数得

$$y\ln x=x\ln y \text{ 或 } \frac{\ln x}{x}=\frac{\ln y}{y} \quad (x>0,y>0).$$

两端对 x 求导数，得

$$\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{y'(1-\ln y)}{y^2},$$

故有

$$y'=\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}.$$

将上式再对 x 求导数，得

$$y''=\frac{1}{x^4(1-\ln y)^2}\left\{x^2(1-\ln y)\left[2yy'(1-\ln x)-\frac{y^2}{x}\right]-y^2(1-\ln x)\left[2x-2x\ln y-\frac{x^2y'}{y}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{x^4(1-\ln y)^3}\left\{y^2\left[y(1-\ln x)^2-2(x-y)\cdot(1-\ln x)(1-\ln y)-x(1-\ln y)^2\right]\right\}.$$

3375. $y=2x\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

解 $\frac{y}{x}=2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$，显然$\frac{y}{x}\neq 1$。

两端微分，得

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{2d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

于是，$d\left(\frac{y}{x}\right)=0$，即$\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$，故有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

将上式对x求导数，即得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}=0.$$

3376．证明：当

$$1+xy=k(x-y)$$

（式中k为常数）时，有等式

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

证 将等式$1+xy=k(x-y)$两端微分，得

$$xdy+ydx=k(dx-dy),$$

故

$$(x-y)(xdy+ydx)=k(x-y)(dx-dy)$$
$$=(1+xy)(dx-dy),$$

简化即得

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

证毕.

3377. 证明：若

$$x^2y^2+x^2+y^2-1=0,$$

则当 $xy>0$ 时有等式

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

证 将所给等式两端微分，得

$$2xy^2dx+2x^2ydy+2xdx+2ydy=0,$$

即

$$x(y^2+1)dx+y(x^2+1)dy=0. \tag{1}$$

由 $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$ 可解得

$$x=\pm\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}},\ y=\pm\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}. \tag{2}$$

因为 $xy>0$，故知 x，y 应同取正号或同取负号.不论取什么符号，当用(2)式代入(1)式后，均可得

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

3378. 证明：方程

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a\neq 0)$$

在点 $x=0$，$y=0$的邻域中定义两个可微分的函数：$y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$. 求 $y_1'(0)$及$y_2'(0)$.

解 $(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2)$*)即

$$y^4+(2x^2+a^2)y^2-(a^2x^2-x^4)=0.$$

解之得

$$y^2=\frac{-(2x^2+a^2)+\sqrt{8a^2x^2+a^4}}{2}$$

（根号前取正号是由于 $y^2\geqslant 0$）．记

$$y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2}}=\pm f(x^2).$$

不难看出(0,0)为枝点．从点(0,0)出发，有单值连续的四个分枝：

$$y_{\text{I}}=f(x^2),\quad 0\leqslant x\leqslant\delta;$$
$$y_{\text{II}}=f(x^2),\quad -\delta\leqslant x\leqslant 0;$$
$$y_{\text{III}}=-f(x^2),\quad 0\leqslant x\leqslant\delta;$$
$$y_{\text{IV}}=-f(x^2),\quad -\delta\leqslant x\leqslant 0.$$

这几个单值分枝能否组成$(-\delta,\delta)$上的可微分函数，主要是看组成的函数在 $x=0$ 是否可微．为此，研究各分枝在点 $x=0$ 处的单侧导数．

$$y'_{\text{I}+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{y_{\text{I}}(x)-y_{\text{I}}(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{f(x^2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{8a^2x^2+a^4-(2x^2+a^2)^2}{2x^2(\sqrt{8a^2x^2+a^4}+2x^2+a^2)}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{4a^2-4x^2}{2(\sqrt{8a^2x^2+a^4}+2x^2+a^2)}}=1.$$

同法可得

$$y'_{\text{I}-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f(x^2)}{x}=-1,$$

$$y'_{\text{II}+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{-f(x^2)}{x}=-1,$$

$$y'_{\text{IV}-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{-f(x^2)}{x}=1.$$

由上可以看出

$$y_1(x)=\begin{cases}f(x^2), & 0\leqslant x<\delta,\\ -f(x^2), & -\delta<x<0,\end{cases}$$

及

$$y_2(x)=\begin{cases}-f(x^2), & 0\leqslant x<\delta,\\ f(x^2), & -\delta<x<0\end{cases}$$

是仅有的两个过点 (0,0) 的可微分函数，且 $y'_1(0)=1$ 及 $y'_2(0)=-1$.

*) 此方程的图象系双纽线（图 6·28），它的极坐标方程为 $r^2=a^2\cos2\theta$. 以上作法及结论由图很容易看

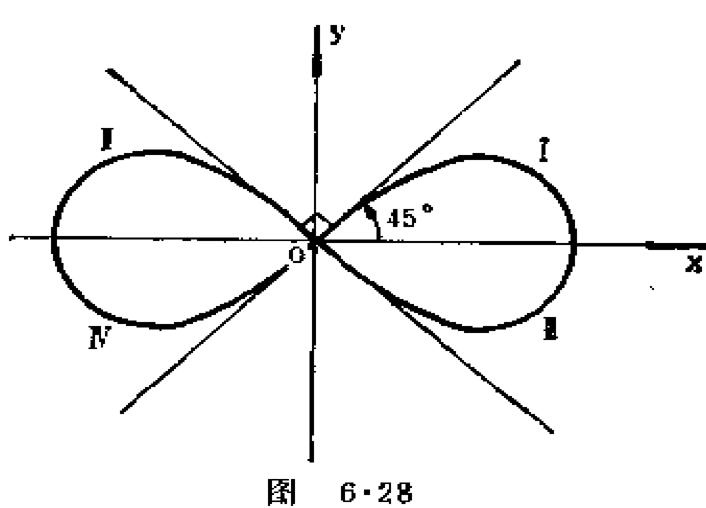


图 6·28

出.

3379. 设:

$$(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3,$$

求 y' 当 $x=0$ 和 $y=0$ 时的值.

解 本题讨论方法与3378题类似，但由于不能直接解出 $y=f(x)$，故只能用隐函数表示. 由 $(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3$ *) 得

$$x^4+(2y^2-3y)x^2+y^4+y^3=0.$$

解之得

$$x^2=\frac{(3y-2y^2)\pm\sqrt{9y^2-16y^3}}{2}.$$

令

$$g(y)=\frac{3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3}}{2},$$

$$h(y)=\frac{3y-2y^2-\sqrt{9y^2-16y^3}}{2},$$

则不难验证：在 $y=0$ 的邻域内均有 $g(y)\geqslant 0$；而仅当 $y\geqslant 0$ 时才有 $h(y)\geqslant 0$. 于是，点 $(0,0)$ 为枝点，且从该点出发，有六个单值连续枝:

Ⅰ. $x_1=\sqrt{g(y)}$, $0\leqslant y<\varepsilon$；它在 $0\leqslant x<\delta$ 上定义隐函数 $y=f_1(x)$.

Ⅱ. $x_2=-\sqrt{g(y)}$, $0\leqslant y<\varepsilon$；它在 $-\delta<x\leqslant 0$ 上定义隐函数 $y=f_2(x)$.

Ⅲ. $x_3=\sqrt{g(y)}$, $-\varepsilon<y\leqslant 0$；它在 $0\leqslant x<\delta$ 上定义隐函数 $y=f_3(x)$.

Ⅳ. $x_4=-\sqrt{g(y)}$, $-\varepsilon<y\leqslant 0$；它在 $-\delta<x\leqslant 0$

上定义隐函数 $y=f_4(x)$.

Ⅴ. $x_5=\sqrt{h(y)}$, $0\leqslant y<\varepsilon$; 它在 $0\leqslant x<\delta$ 上定义隐函数 $y=f_5(x)$.

Ⅵ. $x_6=-\sqrt{h(y)}$, $0\leqslant y<\varepsilon$; 它在 $-\delta<x\leqslant 0$ 上定义隐函数 $y=f_6(x)$.

上述隐函数的存在性，易从对右端 y 的表达式求导数而导数不为零获证.因此,只要求上述六枝在原点的单侧导数.

$$f'_{1+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\sqrt{g(y)}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y^2}{3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3}}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y}{3-2y+\sqrt{9-16y}}}=0.$$

$$f'_{2-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{-\sqrt{g(y)}}=0.$$

$$f'_{3+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0}=\lim_{y\to-0}\frac{y}{\sqrt{g(y)}}$$

$$=\lim_{z\to+0}\frac{-z}{\sqrt{g(-z)}}$$

$$=-\lim_{z\to+0}\sqrt{\frac{2z^2}{\sqrt{9z^2+16z^3}-3z-2z^2}}$$

$$=-\lim_{z\to+0}\sqrt{\frac{2z^2(\sqrt{9z^2+16z^3}+3z+2z^2)}{(9z^2+16z^3)-(3z+2z^2)^2}}$$

$$= -\lim_{z\to+0}\sqrt{\frac{2(\sqrt{9+16z}+3+2z)}{4-4z}} = -\sqrt{3}.$$

$$f'_{4-}(0) = \lim_{x\to-0}\frac{f_4(x)}{x} = \lim_{z\to-0}\frac{y}{-\sqrt{g(y)}}$$

$$= -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}.$$

$$f'_{5+}(0) = \lim_{x\to+0}\frac{f_5(x)}{x} = \lim_{y\to+0}\frac{y}{\sqrt{h(y)}}$$

$$= \lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y^2}{3y-2y^2-\sqrt{9y^2-16y^3}}}$$

$$= \lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y^2(3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3})}{(3y-2y^2)^2-(9y^2-16y^3)}}$$

$$= \lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2(3-2y+\sqrt{9-16y})}{4+4y}} = \sqrt{3}.$$

$$f'_{6-}(0) = \lim_{x\to-0}\frac{f_6(x)}{x} = \lim_{z\to+0}\frac{y}{-\sqrt{h(y)}} = -\sqrt{3}.$$

于是，上述六个单值连续枝可组成三个$(-\delta,\delta)$上的可微函微 $y=y_i(x)$ $(i=1,2,3)$：

$$y_1(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\geqslant 0 \\ f_2(x), & x<0 \end{cases},\quad y_1'(0)=0;$$

$$y_2(x)=\begin{cases} f_3(x), & x\geqslant 0 \\ f_6(x), & x<0 \end{cases},\quad y_2'(0)=-\sqrt{3};$$

$$y_3(x)=\begin{cases} f_5(x), & x\geqslant 0 \\ f_4(x), & x<0 \end{cases},\quad y_3'(0)=\sqrt{3}.$$

*) 此方程的图象为三瓣玫瑰线（图6·29），它的极坐标方程为

$$r=a\sin 3\theta.$$

以上作法及结论，由图很容易看出.

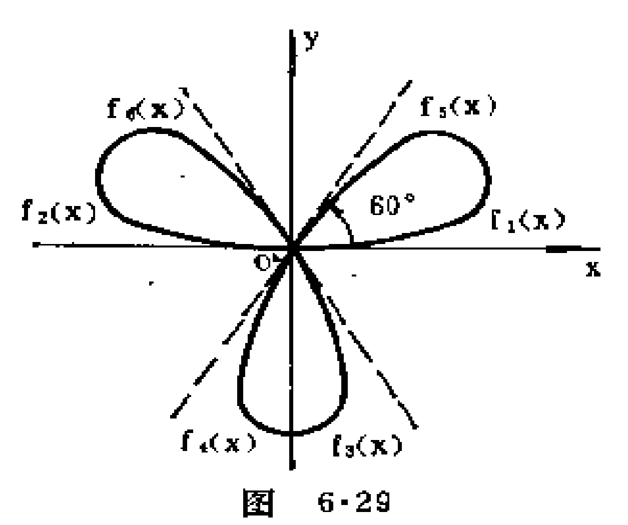


图 6·29

3380. 设$x^2+xy+y^2=3$，求 y'，y''及y'''.

解 等式两端对 x 求导数，得

$$2x+y+xy'+2yy'=0.$$

于是，

$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}.$$

再对上式求导数，得

$$y''=-\frac{1}{(x+2y)^2}\{(2+y')(x+2y)$$

$$-(1+2y')(2x+y)\}=-\frac{18}{(x+2y)^3};$$

$$y'''=\frac{54}{(x+2y)^4}(1+2y')=-\frac{162x}{(x+2y)^5}.$$

3381. 设：

$$x^2-xy+2y^2+x-y-1=0,$$

求 y'，y''及y'''当$x=0$，$y=1$时的值.

解 等式两端对 x 求导数，得

$$2x-y-xy'+4yy'+1-y'=0. \qquad (1)$$

以$x=0$，$y=1$代入(1)式，得

$$y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=0.$$

将（1）式再对x求导数，得

$$2-y'-y'-xy''+4y'^2+4yy''-y''=0. \qquad (2)$$

以$x=0$，$y=1$，$y'=0$代入(2)式，得

$$y''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{2}{3}.$$

将（2）式再对x求导数，得

$$-3y''-xy'''+12y'y''+4yy'''-y'''=0. \qquad (3)$$

以$x=0$，$y=1$，$y'=0$，$y''=-\frac{2}{3}$代入(3)式，得

$$y'''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{2}{3}.$$

3382. 证明：对于二次曲线

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

等式

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]=0$$

为真.

证 原题中的二次曲线应是非退化的，即

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}\neq 0,$$

由 $\Delta\neq 0$ 保证 $y''\neq 0$。

等式两端对 x 求导数，得

$$2ax+2by+2bxy'+2cyy'+2d+2ey'=0. \quad (1)$$

于是，

$$y'=-\frac{ax+by+d}{bx+cy+e}.$$

(1) 式除以 2 后，两端再对 x 求导数，得

$$a+2by'+cy'^2+(bx+cy+e)y''=0.$$

于是，

$$y''=-\frac{a+2by'+cy'^2}{bx+cy+e}=-\frac{1}{(bx+cy+e)^3}$$

$$\cdot\{a(bx+cy+e)^2-2b(bx+cy+e)(ax+by+d)$$

$$+c(ax+by+d)^2\}$$

$$=\frac{\Delta}{(bx+cy+e)^3},$$

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}=\Delta^{-\frac{2}{3}}\cdot(bx+cy+e)^2$$

$$=\Delta^{-\frac{2}{3}}\cdot[b^2x^2+c(cy^2+2bxy+2ey)+e^2+2bex]$$

$$=\Delta^{-\frac{2}{3}}\cdot[b^2x^2-c(ax^2+2dx+f)+2bex+e^2]$$

$$=\Delta^{-\frac{2}{3}}\cdot[(b^2-ac)x^2+2(be-cd)x+e^2-cf],$$

即 $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ 是关于 x 的二次三项式，故

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]=0.$$

对于函数 $z=z(x,y)$ 求一阶和二阶的偏导函数，设：

3383. $x^2+y^2+z^2=a^2$.

解 等式两端微分，得

$$2xdx+2ydy+2zdz=0, \quad (1)$$

$$dx^2+dy^2+dz^2+zd^2z=0. \quad (2)$$

由（1）得

$$dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

由（2）得

$$d^2z=-\frac{1}{z}(dx^2+dy^2+dz^2)$$

$$=-\frac{1}{z}dx^2-\frac{1}{z}dy^2-\frac{1}{z}\left(\frac{x}{z}dx+\frac{y}{z}dy\right)^2$$

$$=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right)dx^2-\frac{2xy}{z^3}dxdy-\frac{1}{z}\left(1+\frac{y^2}{z^2}\right)dy^2,$$

故有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right)=-\frac{z^2+x^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{z^2+y^2}{z^3}.$$

3384. $z^3-3xyz=a^3$.

解 等式两端对 x 求偏导函数，得

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\frac{\partial z}{\partial x}=0, \tag{1}$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}.$$

同法可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}.$$

（1）式除以 3 后再分别对 x 及对 y 求偏导函数，得

$$2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2y\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(z^2-xy\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$-z-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

将$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入上述两式，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}.$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}.$$

3385. $x+y+z=e^z$.

解 等式两端微分，得

$$dx+dy+dz=e^z dz, \tag{1}$$

故有

$$dz=\frac{1}{e^z-1}(dx+dy)=\frac{1}{x+y+z-1}(dx+dy).$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}.$$

再将（1）式微分一次，得

$$d^2z=e^z d^2z+e^z dz^2,$$

故有

$$d^2z=-\frac{e^z}{e^z-1}(dz)^2=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}(dx^2+2dxdy+dy^2).$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}$$

$$=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}.$$

3386. $z=\sqrt{x^2-y^2}\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

解 设 $r=\sqrt{x^2-y^2}$，则 $\frac{z}{r}=\operatorname{tg}\frac{z}{r}$，

$$d\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{d\left(\frac{z}{r}\right)}{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}.$$

从而有$d\left(\frac{z}{r}\right)=0$，或 $rdz-zdr=0$，即

$$dz=\frac{z}{r^2}(xdx-ydy). \tag{1}$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zx}{r^2}=\frac{xz}{x^2-y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{r^2}=-\frac{yz}{x^2-y^2}.$$

由（1）得

$$(x^2-y^2)dz=xzdx-yzdy. \tag{2}$$

（2）式再微分一次，得

$$\begin{aligned}(x^2-y^2)d^2z&=-(2xdx-2ydy)dz+xdxdz\\&\quad+zdx^2-ydydz-zdy^2\\&=-(xdx-ydy)\left[\frac{z(xdx-ydy)}{x^2-y^2}\right]+zdx^2-zdy^2\\&=\frac{z}{x^2-y^2}\Big[-x^2dx^2+2xydxdy-y^2dy^2\\&\quad+(x^2-y^2)dx^2-(x^2-y^2)dy^2\Big]\\&=\frac{z(-y^2dx^2+2xydxdy-x^2dy^2)}{x^2-y^2}.\end{aligned}$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2 z}{(x^2-y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x^2 z}{(x^2-y^2)^2}.$$

3387. $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$.

解 等式两端对 x 求偏导函数，得

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-(x+y+z)}\cdot\left(-1-\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

利用对称性，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-1.$$

显见

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

3388. 设：

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0 \tag{1}$$

及

$$f(x,y,z)=xy^2z^3.$$

求：(a) $f'_x(1,1,1)$，设 $z=z(x, y)$是由方程（1）所定义的隐函数，（б）$f'_x(1,1,1)$，设 $y=y(x, z)$是由方程（1）所定义的隐函数。说明为什么这些导

函数相异.

解 (a) 记 $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3xyz=0$，则由方程（1）所定义的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导函数 $z'_x(x,y)$ 在 (1,1) 点的值为

$$z'_x(1,1) = -\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = -\frac{\left.\frac{d}{dx}F(x,1,1)\right|_{x=1}}{\left.\frac{d}{dz}F(1,1,z)\right|_{z=1}}$$

$$= -\frac{\left.\frac{d}{dx}(x^2+2-3x)\right|_{x=1}}{\left.\frac{d}{dz}(2+z^2-3z)\right|_{z=1}} = -1.$$

于是，

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y,z(x,y))]\right|_{(1,1,1)}$$

$$= \left.\frac{d}{dx}f(x,1,1)\right|_{x=1} + \left.\frac{\partial}{\partial z}f(1,1,z)\right|_{z=1} \cdot z'_x(1,1)$$

$$= 1+3\cdot(-1) = -2.$$

(б) $y'_x(1,1) = -\dfrac{F'_x(1,1,1)}{F'_y(1,1,1)}$

$$= -\frac{\left.\frac{d}{dx}F(x,1,1)\right|_{x=1}}{\left.\frac{d}{dy}F(1,y,1)\right|_{y=1}} = -1.$$

于是，

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y(x,z),z)]\right|_{(1,1,1)}$$

$$=\frac{d}{dx}f(x,1,1)\Big|_{x=1}+\frac{d}{dy}f(1,y,1)\Big|_{y=1}\cdot y'_x(1,1)$$

$$=1+2\cdot(-1)=-1.$$

由（a）与（б）所求得的对 x 的偏导函数在 $(1,1,1)$ 点的值不相等，可说明如下：

方程 $F(x,y,z)=0$ 代表一个空间曲面，而 $f(x,y,z)$ 表示定义在这个曲面上的一个函数．函数 $G(x,y)=f(x,y,z(x,y))$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxy 平面上后，原曲面上的函数看成在 Oxy 平面上定义的一个函数，$G'_x(x,y)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率，它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率，还包含了原来函数在 Oz 轴方向的变化率的一部份．同样地，$H(x,z)=f(x,y(x,z),z)$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxz 平面上后，原曲面上的函数看成在 Oxz 平面上定义的函数，$H'_x(x,z)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率，它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率，还包含了原来函数在 Oy 轴方向的变化率的一部份．一般地，原来函数在 Oy 轴和 Oz 轴方向的变化率的那两部份是不相等的．

3389． 设 $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 当 $x=1$，$y=-2$，$z=1$ 时的值．

解 等式两端微分一次，得

$$2xdx+4ydy+6zdz+xdy+ydx-dz=0.$$

即

$$(1-6z)dz=(2x+y)dx+(4y+x)dy. \qquad (1)$$

再微分一次，得

$$(1-6z)d^2z=6dz^2+2dx^2+2dxdy+4dy^2. \qquad (2)$$

以$x=1$，$y=-2, z=1$代入（1）式，得$dz=\frac{7}{5}dy$.

再以$z=1$，$dz=\frac{7}{5}dy$代入（2）式，得

$$d^2z=-\frac{2}{5}dx^2-\frac{2}{5}dxdy-\frac{394}{125}dy^2.$$

于是，当$x=1$，$y=-2, z=1$时，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{5}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{5}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{394}{125}.$$

求dz和d^2z，设：

3390. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

解 等式两端微分一次，得

$$\frac{2x}{a^2}dx+\frac{2y}{b^2}dy+\frac{2z}{c^2}dz=0.$$

于是，

$$dz=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}\right).$$

再将dz微分一次，得

$$d^2z=-\frac{c^2}{z^2}\left[z\left(\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}\right)-\left(\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}\right)dz\right]$$

$$=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}dxdy\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right].$$

3391. $xyz=x+y+z$.

解 等式两端微分一次，得

$$yzdx+xzdy+xydz=dx+dy+dz. \qquad (1)$$

于是，

$$dz=-\frac{(1-yz)dx+(1-xz)dy}{1-xy}. \qquad (2)$$

对（1）式再微分一次，得

$$2zdxdy+2xdydz+2ydxdz+xyd^2z=d^2z. \qquad (3)$$

以（2）式代入（3）式，化简整理得

$$d^2z=-\frac{2}{(1-xy)^2}\Big\{y(1-yz)dx^2+[x+y$$

$$-z(1+xy)]dxdy+x(1-xz)dy^2\Big\}$$

$$=-\frac{2\{y(1-yz)dx^2-2zdxdy+x(1-xz)dy^2\}}{(1-xy)^2}.$$

3392. $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$.

解 等式两端微分一次，得

$$\frac{zdx-xdz}{z^2}=\frac{dz}{z}-\frac{dy}{y}.$$

于是，

$$dz=\frac{z(ydx+zdy)}{y(x+z)}.$$

对 $(x+z)\,dz=zdx+\frac{z^2}{y}dy$再微分一次，得

$$(x+z)d^2z=-(dx+dz)dz+dzdx$$

$$+\frac{2z}{y}dzdy-\frac{z^2}{y^2}dy^2$$

$$=-dz^2+\frac{2z}{y}dydz-\frac{z^2}{y^2}dy^2=-\left(dz-\frac{z}{y}dy\right)^2$$

$$=-\frac{z^2[(ydx+zdy)-(x+z)dy]^2}{y^2(x+z)^2}$$

$$=-\frac{z^2(ydx-xdy)}{y^2(x+z)^2}.$$

于是，

$$d^2z=-\frac{z^2(ydx-xdy)^2}{y^2(x+z)^3}.$$

3393. $z=x+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{z-x}$.

解 等式两端微分一次，得

$$dz=dx+\frac{1}{1+\frac{y^2}{(z-x)^2}}\cdot\frac{(z-x)dy-y(dz-dx)}{(z-x)^2}.$$

化简整理，得

$$dz=dx+\frac{z-x}{(z-x)^2+y(y+1)}dy.$$

再对上式微分一次，得

$$d^2z=\frac{1}{[(z-x)^2+y(y+1)]^2}\{[(z-x)^2$$
$$+y(y+1)]dy\cdot(dz-dx)-(z-x)dy$$
$$\cdot[2(z-x)(dz-dx)+2ydy+dy]\}.$$

将 dz 代入化简整理，即有

$$d^2z=\frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(y+1)]^3}dy^2.$$

3394．设 $u^3-3(x+y)u^2+z^3=0$，求 du。

解 等式两端微分，得

$$3u^2du-3u^2(dx+dy)-6u(x+y)du+3z^2dz=0.$$

于是，

$$du=\frac{u^2(dx+dy)-z^2dz}{u[u-2(x+y)]}.$$

3395．设 $F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 等式两端对 x 求偏导函数，得

$$F_1'\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_2'\cdot\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'+2xF_2'}{F_1'+2zF_2'}. \qquad (1)$$

同法可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_1+2yF'_2}{F'_1+2zF'_2}.$$

(1) 式两端对 y 求偏导函数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{(F'_1+2zF'_2)^2}\{(F'_1+2zF'_2)$$

$$\cdot[(F'_1)'_y+2x(F'_2)'_y]-(F'_1+2xF'_2)$$

$$\cdot[(F'_1)'_y+2z(F'_2)'_y+2z'_y\cdot F'_2]\}$$

$$=-\frac{1}{(F'_1+2zF'_2)^2}\{2(x-z)F'_1\cdot(F'_2)'_y+2(z-x)F'_2$$

$$\cdot(F'_1)'_y-2[F'_1F'_2+x(F'_2)^2]z'_y\}$$

$$=-\frac{2(x-z)}{(F'_1+2zF'_2)^2}\{F'_1\cdot(F'_2)'_y-F'_2\cdot(F'_1)'_y\}$$

$$-\frac{2F'_2\cdot(F'_1+2xF'_2)\cdot(F'_1+2yF'_2)}{(F'_1+2zF'_2)^3}.$$

现分别求 $(F'_1)'_y$ 及 $(F'_2)'_y$：

$$(F'_1)'_y=F''_{11}\cdot(1+z'_y)+F''_{12}\cdot(2y+2zz'_y),$$

$$(F'_2)'_y=F''_{21}\cdot(1+z'_y)+F''_{22}\cdot(2y+2zz'_y).$$

注意到

$$1+z'_y=\frac{2(z-y)F'_2}{F'_1+2zF'_2},\quad 2y+2zz'_y=\frac{2(y-z)F'_1}{F'_1+2zF'_2},$$

即得

$$F'_1\cdot(F'_2)'_y-F'_2\cdot(F'_1)'_y=F'_1F''_{21}\cdot\frac{2(z-y)F'_2}{F'_1+2zF'_2}$$

$$+F'_1F''_{22}\cdot\frac{2(y-z)F'_1}{F'_1+2zF'_2}$$

$$-F'_2F''_{11}\cdot\frac{2(z-y)F'_2}{F'_1+2zF'_2}-F'_2F''_{12}\cdot\frac{2(y-z)F'_1}{F'_1+2zF'_2}$$

$$=\frac{2(y-z)}{F'_1+2zF'_2}\{(F'_1)^2F''_{22}-2F'_1F'_2F''_{12}+(F'_2)^2F''_{11}\}.$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4(x-z)(y-z)}{(F'_1+2zF'_2)^3}\{(F'_1)^2F''_{22}$$

$$-2F'_1F'_2F''_{12}+(F'_2)^2F''_{11}\}$$

$$-\frac{2F'_2\cdot(F'_1+2xF'_2)\cdot(F'_1+2yF'_2)}{(F'_1+2zF'_2)^3}.$$

3396．设 $F(x-y,\ y-z,\ z-x)=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 等式两端对 x 求偏导函数，得

$$F'_1+F'_2\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_3\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)=0\ .$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F'_1-F'_3}{F'_2-F'_3}.$$

同法可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F'_2-F'_1}{F'_2-F'_3}.$$

3397. 设 $F(x, x+y, x+y+z)=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解 等式两端分别对 x 及对 y 求偏导函数，得

$$F'_1+F'_2+F'_3\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$F'_2+F'_3\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\left(1+\frac{F'_1+F'_2}{F'_3}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\left(1+\frac{F'_2}{F'_3}\right).$$

再将$\frac{\partial z}{\partial x}$对 x 求偏导函数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(F'_3)^2}\left\{F'_3\cdot\left[F''_{11}+F''_{12}+F''_{13}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right.\right.$$

$$\left.+F''_{21}+F''_{22}+F''_{23}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]$$

$$\left.-(F'_1+F'_2)\cdot\left[F''_{31}+F''_{32}+F''_{33}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\right\}.$$

将$\frac{\partial z}{\partial x}$代入化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(F'_3)^3}\{(F'_3)^2\cdot(F''_{11}+2F''_{12}+F''_{22})$$

$$-2(F'_1+F'_2)F'_3\cdot(F''_{13}+F''_{23})+(F'_1+F'_2)^2F''_{33}\}.$$

3398. 设 $F(xz, yz)=0$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解 等式两端对 x 求偏导函数，得

$$F'_1\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2\cdot y\frac{\partial z}{\partial x}=0 .$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{zF'_1}{xF'_1+yF'_2} .$$

将$\frac{\partial z}{\partial x}$再对 x 求偏导函数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(xF'_1+yF'_2)^2}\left\{(xF'_1+yF'_2)\cdot\left[F'_1\frac{\partial z}{\partial x}\right.\right.$$

$$\left.+z\left(F''_{11}\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{12}y\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]$$

$$-\left[F'_1+x\left(F''_{11}\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{12}y\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left.\left.+y\left(F''_{21}\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{22}y\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]zF'_1\right\}.$$

将$\frac{\partial z}{\partial x}$代入化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(xF'_1+yF'_2)^3}\{y^2z^2[(F'_1)^2F''_{22}$$

$$-2F'_1F'_2F''_{12}+(F'_2)^2F''_{11}]-2z(F'_1)^2$$

$$\cdot(xF'_1+yF'_2)\} .$$

3399. 设 (a) $F(x+z,\ y+z)=0$；

(б) $F\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)=0$，求 d^2z.

解 (a) 等式两端微分，得

$$F'_1\cdot(dx+dz)+F'_2\cdot(dy+dz)=0. \qquad (1)$$

于是，

$$dz=-\frac{F'_1dx+F'_2dy}{F'_1+F'_2},$$

$$dx+dz=\frac{F'_2\cdot(dx-dy)}{F'_1+F'_2},$$

$$dy+dz=-\frac{F'_1\cdot(dx-dy)}{F'_1+F'_2}.$$

对（1）式再求一次微分，得

$$F''_{11}\cdot(dx+dz)^2+2F''_{12}\cdot(dx+dz)(dy+dz)+F''_{22}\cdot(dy+dz)^2+(F'_1+F'_2)d^2z=0.$$

于是，

$$d^2z=-\frac{1}{F'_1+F'_2}[F''_{11}\cdot(dx+dz)^2+2F''_{12}\cdot(dx+dz)(dy+dz)+F''_{22}\cdot(dy+dz)^2]$$

$$=-\frac{1}{(F'_1+F'_2)^3}[F''_{11}\cdot(F'_2)^2-2F'_1F'_2F''_{12}+F''_{22}\cdot(F'_1)^2](dx-dy)^2.$$

(б) 等式两端微分，得

$$F'_1\cdot\frac{zdx-xdz}{z^2}+F'_2\cdot\frac{zdy-ydz}{z^2}=0. \qquad (2)$$

于是，

$$dz=\frac{z(F'_1dx+F'_2dy)}{xF'_1+yF'_2},$$

$$zdx-xdz=\frac{zF'_2\cdot(ydx-xdy)}{xF'_1+yF'_2},$$

$$zdy-ydz=-\frac{zF'_1\cdot(ydx-xdy)}{xF'_1+yF'_2}.$$

(2) 式乘以 z^2 后再微分一次，得

$$F''_{11}\cdot\frac{(zdx-xdz)^2}{z^2}+2F''_{12}$$

$$\cdot\frac{(zdx-xdz)(zdy-ydz)}{z^2}+F''_{22}\cdot\frac{(zdy-ydz)^2}{z^2}$$

$$-(xF'_1+yF'_2)d^2z=0.$$

于是，

$$d^2z=\frac{1}{z^2(xF'_1+yF'_2)}[F''_{11}\cdot(zdx-xdz)^2$$

$$+2F''_{12}(zdx-xdz)(zdy-ydz)$$
$$+F''_{22}\cdot(zdy-ydz)^2]$$

$$=\frac{(ydx-xdy)^2}{(xF'_1+yF'_2)^3}[F''_{11}\cdot(F'_2)^2$$

$$-2F'_1F'_2F''_{12}+F''_{22}\cdot(F'_1)^2].$$

3400. 设 $x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$，$z=z(x,y)$ 为由方程 $F(x,y,z)=0$ 所定义的函数。证明：

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

证 根据隐函数求导法，有

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

三式相乘即得

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

3401．设 $x+y+z=0$，$x^2+y^2+z^2=1$，求 $\frac{dx}{dz}$ 和 $\frac{dy}{dz}$.

解 对 z 求导数，得

$$\begin{cases}\frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}+1=0,\\ 2x\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}+2z=0.\end{cases}$$

联立求解，得

$$\frac{dx}{dz}=\frac{y-z}{x-y},\quad \frac{dy}{dz}=\frac{z-x}{x-y}.$$

3402．设 $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$，$x+y+z=2$，求 $\frac{dx}{dz}$，$\frac{dy}{dz}$，$\frac{d^2x}{dz^2}$ 和 $\frac{d^2y}{dz^2}$ 当 $x=1$，$y=-1$，$z=2$ 时的值.

解 对 z 求导数，得

$$\begin{cases}2x\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}=z, & (1)\\ \frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}+1=0, & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+2x\frac{d^2x}{dz^2}+2\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+2\frac{d^2y}{dz^2}=1, & (3)\\ \frac{d^2x}{dz^2}+\frac{d^2y}{dz^2}=0. & (4)\end{cases}$$

将 $x=1, y=-1, z=2$ 代入（1），（2），解得

$$\frac{dx}{dz}=0,\ \frac{dy}{dz}=-1.$$

将上述结果及 x，y，z 值联同由（4）式所决定的式子 $\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{d^2y}{dz^2}$ 一起代入（3）式，即得

$$\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{1}{4},\ \frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{4}.$$

3403．设 $xu-yv=0$，$yu+xv=1$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 微分得

$$\begin{cases}xdu-ydv=vdy-udx,\\ ydu+xdv=-vdx-udy.\end{cases}$$

于是，

$$du=\frac{1}{x^2+y^2}[-(xu+yv)dx+(xv-yu)dy],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}.$$

同法可得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2>0).$$

3404. 设 $u+v=x+y$, $\frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y}$, 求$du$, dv, d^2u和d^2v.

解 将原式改写为

$$\begin{cases} u+v=x+y, \\ y\sin u=x\sin v. \end{cases}$$

微分得

$$\begin{cases} du+dv=dx+dy, & (1) \\ \sin u dy+y\cos u du=\sin v dx+x\cos v dv. & (2) \end{cases}$$

联立求解，得

$$du=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[(\sin v+x\cos v)dx$$

$$-(\sin u-x\cos v)dy],$$

$$dv=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[-(\sin v-y\cos u)dx$$

$$+(\sin u+y\cos u)dy].$$

对（1），（2）式再微分一次，得

$$\begin{cases} d^2u+d^2v=0, \\ y\cos u\cdot d^2u+2\cos u\cdot dydu-y\sin u\cdot du^2 \\ \quad =x\cos v\cdot d^2v+2\cos v\cdot dxdv-x\sin v\cdot dv^2. \end{cases}$$

联立求解，得

$$d^2u=-d^2v=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[(2\cos v dx$$

$$-x\sin v dv)dv-(2\cos u dy-y\sin u du)du].$$

3405. 设：

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}},e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}}.$$

求 du,dv,d^2u 和 d^2v 当$x=1$，$y=1$，$u=0$，$v=\frac{\pi}{4}$时的表达式.

解 将所给二式相除及平方相加，分别得

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{v}{y}=\frac{y}{x}, & (1)\\ e^{\frac{2u}{x}}=\frac{x^2+y^2}{2}. & (2)\end{cases}$$

微分（1）式：

$$\sec^2\frac{v}{y}\cdot\frac{ydv-vdy}{y^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2}. \quad (3)$$

以 $x=1$，$y=1$，$v=\frac{\pi}{4}$代入(3)代，得

$$dv=\frac{\pi}{4}dy-\frac{1}{2}(dx-dy).$$

微分（3）式：

$$2\sec^2\frac{v}{y}\operatorname{tg}\frac{v}{y}\cdot\left(\frac{ydv-vdy}{y^2}\right)^2+\sec^2\frac{v}{y}$$

$$\cdot\frac{y^2d^2v-2(ydv-vdy)dy}{y^3}$$

$$=\frac{-2(xdy-ydx)dx}{x^3}. \tag{4}$$

以$x=1$，$y=1$，$v=\frac{\pi}{4}$及dv值代入(4)式，得

$$d^2v=\frac{1}{2}(dx-dy)^2.$$

微分（2）式：

$$2e^{\frac{2u}{x}}\cdot\frac{xdu-udx}{x^2}=xdx+ydy. \tag{5}$$

以$x=1$，$y=1$，$u=0$代入(5)式，得

$$du=\frac{dx+dy}{2}.$$

微分（5）式：

$$4e^{\frac{2u}{x}}\left(\frac{xdu-udx}{x^2}\right)^2+2e^{\frac{2u}{x}}\frac{x^2d^2u-2(xdu-udx)dx}{x^3}$$

$$=dx^2+dy^2. \tag{6}$$

以$x=1$，$y=1$，$u=0$及du代入(6)式，得

$$d^2u=dx^2.$$

3406．设：

$$x=t+t^{-1},\ y=t^2+t^{-2},\ z=t^3+t^{-3}.$$

求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$和$\frac{d^2z}{dx^2}$。

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{2t-\dfrac{2}{t^3}}{1-\dfrac{1}{t^2}}=2\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$;

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\dfrac{dz}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-\dfrac{3}{t^4}}{1-\dfrac{1}{t^2}}=3\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{2\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)}{1-\dfrac{1}{t^2}}=2;$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dz}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{3\left(2t-\dfrac{2}{t^3}\right)}{1-\dfrac{1}{t^2}}=6\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

注　本题也可消去 t 以求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dz}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 和 $\dfrac{d^2z}{dx^2}$. 事实上，

$$y=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2=x^2-2,$$

$$z=\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t^2-1+\frac{1}{t^2}\right)=x(x^2-3)=x^3-3x.$$

于是，

$$\frac{dy}{dx}=2x,\quad \frac{dz}{dx}=3x^2-3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2,\quad \frac{d^2z}{dx^2}=6x.$$

再将 $x=t+\frac{1}{t}$ 代入上述结果，即得

$$\frac{dy}{dx}=2\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad \frac{dz}{dx}=3\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2,\quad \frac{d^2z}{dx^2}=6\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

3407．在 Oxy 平面上怎样的域内方程组

$$x=u+v,\quad y=u^2+v^2,\quad z=u^3+v^3$$

（式中参数 u 和 v 取一切可能的实数值）定义 z 为变数 x 和 y 的函数？求导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 由 $u+v=x$，$u^2+v^2=y$ 解得

$$u=\frac{x\pm\sqrt{2y-x^2}}{2},\quad v=\frac{x\mp\sqrt{2y-x^2}}{4},$$

其中 $2y-x^2\geqslant 0$ 或 $y\geqslant\frac{x^2}{2}$，此即所求之域.

再由 $x=u+v$ 及 $y=u^2+v^2$ 分别对 x 求偏导函数，得

$$1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x},\quad 0=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}.$$

联立求解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v}{v-u},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{u}{v-u}\quad (u\neq v).$$

又由 $z=u^3+v^3$ 对 x 求偏导函数，即可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3u^2\frac{\partial u}{\partial x}+3v^2\frac{\partial v}{\partial x}=3u^2\cdot\frac{v}{v-u}$$

$$-3v^2\cdot\frac{u}{v-u}=-3uv.$$

同法求得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}(u+v).$$

注 本题也可消去 u,v 求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$. 事实上,

$$x^2-y=2uv,$$

$$z=(u+v)(u^2-uv+v^2)=x\left(\frac{3}{2}y-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=\frac{x}{2}(3y-x^2).$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}x^2=-3uv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}(u+v).$$

但一般说来,用参数表示的函数和消去参数后的函数,它们的定义域是不同的.

3408. 设 $x=\cos\varphi\cos\psi, y=\cos\varphi\sin\psi, z=\sin\varphi$, 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 由 $x=\cos\varphi\cos\psi$, $y=\cos\varphi\sin\psi$ 对 x 求偏导函数,得

$$\begin{cases} 1 = -\sin\varphi\cos\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - \cos\varphi\sin\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \\ 0 = -\sin\varphi\sin\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos\varphi\cos\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}. \end{cases}$$

联立求解，得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\cos\psi}{\sin\varphi}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\operatorname{ctg}\varphi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$= \frac{\cos\psi}{\sin^2\varphi}\cdot\left(-\frac{\cos\psi}{\sin\varphi}\right) + \operatorname{ctg}\varphi\sin\psi\cdot\left(-\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}\right)$$

$$= -\frac{\cos^2\psi + \sin^2\psi\sin^2\varphi}{\sin^3\varphi} = -\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}.$$

注　本题也可消去 φ，ψ 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. 事实上，

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2\varphi\cos^2\psi + \cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi$$
$$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

于是，

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z - x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3}$$

$$= -\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}.$$

3409. 设 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 本题求微分，可将所有的二阶偏导函数一起求出.

$$dx=\cos v du-u\sin v dv,$$

$$dy=\sin v du+u\cos v dv.$$

联立求解，得

$$du=\cos v dx+\sin v dy,$$

$$dv=\frac{1}{u}(-\sin v dx+\cos v dy),$$

$$u dv=-\sin v dx+\cos v dy.$$

再对上式微分一次，得

$$ud^2v+du dv=-\cos v dv dx-\sin v dv dy$$

$$=-du dv,$$

于是，

$$d^2z=d^2v=-\frac{2}{u}du dv=-\frac{2}{u^2}(\cos v dx+\sin v dy)$$

$$\cdot(-\sin v dx+\cos v dy)$$

$$=\frac{2}{u^2}(\sin v\cos v dx^2-\cos 2v dx dy-\sin v\cos v dy^2),$$

从而有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\sin v\cos v}{u^2}=\frac{\sin 2v}{u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\cos 2v}{u^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\sin 2v}{u^2}.$$

注　本题也可消去u, v，由$z=v=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$获解。

3410．设$z=z(x,\ y)$为由方程组：

$$x=e^{u+v},\quad y=e^{u-v},\quad z=uv$$

（u及v为参数）所定义的函数，求当$u=0$及$v=0$时的dz及d^2z。

解　$$dx\Big|_{\substack{u=0\\v=0}}=e^{u+v}(du+dv)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}}=du+dv,$$

$$dy\Big|_{\substack{u=0\\v=0}}=e^{u-v}(du-dv)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}}=du-dv.$$

于是，当$u=0$及$v=0$时，

$$du=\frac{1}{2}(dx+dy),\quad dv=\frac{1}{2}(dx-dy);$$

$$dz=udv+vdu=0;$$

$$d^2z=ud^2v+2dudv+vd^2u=2dudv$$

$$=2\left(\frac{dx+dy}{2}\right)\left(\frac{dx-dy}{2}\right)=\frac{1}{2}(dx^2-dy^2).$$

3411．设$z=x^2+y^2$，其中$y=y(x)$为由方程$x^2-xy+y^2=1$所定义的函数．求$\frac{dz}{dx}$及$\frac{d^2z}{dx^2}$.

解　先由$x^2-xy+y^2=1$求$\frac{dy}{dx}$及$\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$2x-y-xy'+2yy'=0,$$

$$2-2y'-xy''+2y'^2+2yy''=0. \qquad (1)$$

于是，

$$y'=\frac{2x-y}{x-2y},\quad y''=\frac{6(x^2-xy+y^2)}{(x-2y)^3}=\frac{6}{(x-2y)^3}.$$

下面求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

$$\frac{dz}{dx}=2x+2yy'=2x+2y\cdot\frac{2x-y}{x-2y}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=2+2y'^2+2y''y=2y'+xy''$$

$$=\frac{2(2x-y)}{x-2y}+\frac{6x}{(x-2y)^3}.$$

3412. 设 $u=\frac{x+z}{y+z}$，其中 z 为由方程式 $ze^z=xe^x+ye^y$ 所定义的函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 将 $ze^z=xe^x+ye^y$ 两端微分，得

$$e^z(1+z)dz=e^x(1+x)dx+e^y(1+y)dy.$$

又因

$$du=\frac{1}{(y+z)^2}[(y+z)dx+(y+z)dz$$

$$-(x+z)dy-(x+z)dz]$$

$$=\frac{1}{(y+z)^2}[(y+z)dx-(x+z)dy+(y-x)dz]$$

$$=\frac{1}{(y+z)^2}\Big[(y+z)dx-(x+z)dy$$

$$+\frac{(y-x)e^x(1+x)}{e^z(1+z)}dx+\frac{(y-x)e^y(1+y)}{e^z(1+z)}dy\Big],$$

故得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y+z}+\frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{x-z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x+z}{(y+z)^2}+\frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{y-z}.$$

3413．设方程：

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v)\quad,\quad z=\chi(u,v)$$

定义 z 为 x 和 y 的函数．求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 对 x 求偏导函数，得

$$1=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{1}$$

$$0=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.\tag{3}$$

由（1）及（2）解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u},\tag{4}$$

其中

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

再将（4）的结果代入（3），即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right),$$

同法求得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right).$$

3414. 设：

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v).$$

求反函数：$u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$的一阶和二阶偏导函数.

解 微分二次，得

$$dx=\varphi_1'du+\varphi_2'dv, \tag{1}$$

$$dy=\psi_1'du+\psi_2'dv, \tag{2}$$

$$0=\varphi_{11}''du^2+2\varphi_{12}''dudv+\varphi_{22}''dv^2+\varphi_1'd^2u+\varphi_2'd^2v, \tag{3}$$

$$0=\psi_{11}''du^2+2\psi_{12}''dudv+\psi_{22}''dv^2+\psi_1'd^2u+\psi_2'd^2v. \tag{4}$$

其中右下角标号 1，2 分别代表对 u，v 的偏导函数，余类推.

令 $I=\varphi_1'\psi_2'-\varphi_2'\psi_1'$，则由（1），（2）可解得

$$du=\frac{1}{I}(\psi_2'dx-\varphi_2'dy), \tag{5}$$

$$dv=\frac{1}{I}(\varphi_1'dy-\psi_1'dx). \tag{6}$$

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\psi_2'=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

由（3），（4）解出d^2u,d^2v，并把(5),(6)的结果代入，即得

$$d^2u=\frac{1}{I}[\varphi_2'(\psi_{11}''du^2+2\psi_{12}''dudv+\psi_{22}''dv^2)$$
$$-\psi_2'(\varphi_{11}''du^2+2\varphi_{12}''dudv+\varphi_{22}''dv^2)]$$

$$=\frac{1}{I^3}[(\varphi_2'\psi_{11}''-\psi_2'\varphi_{11}'')(\psi_2'dx-\varphi_2'dy)^2$$

$$+2(\varphi_2'\psi_{12}''-\psi_2'\varphi_{12}'')(\psi_2'dx-\varphi_2'dy)(\varphi_1'dy$$
$$-\psi_1'dx)+(\varphi_2'\psi_{22}''-\psi_2'\varphi_{22}'')(\varphi_1'dy-\psi_1'dx)^2]$$

$$=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}dy^2.$$

比较上式两端的系数，即得

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{1}{I^3}\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\Big)$$

$$\cdot\Big(\frac{\partial\psi}{\partial v}\Big)^2-2\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\Big)$$

$$\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2\Bigg],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{I^3}\Bigg[\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)$$

$$\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Bigg].$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{I^3}\Bigg[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2$$

$$-2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right)$$

$$\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\Bigg].$$

同法可求得 d^2v 和$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

3415．设(a)$x=u\cos\frac{v}{u}$，$y=u\sin\frac{v}{u}$；

(б)$x=e^u+u\sin v$，$y=e^u-u\cos v$，

求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 利用 3414 题的结果求之.

(a) $\varphi(u,v)=u\cos\frac{v}{u}$, $\psi(u, v)=u\sin\frac{v}{u}$. 于是,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\sin\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u},\quad \frac{\partial\psi}{\partial v}=\cos\frac{v}{u},$$

$$I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}=\left(\cos\frac{v}{u}\right.$$

$$\left.+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}\right)\cos\frac{v}{u}-\left(-\sin\frac{v}{u}\right)$$

$$\cdot\left(\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}\right)=1.$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v}=\cos\frac{v}{u},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\sin\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u}=\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}-\sin\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}+\cos\frac{v}{u}.$$

(б) $\varphi(u,v)=e^u+u\sin v$, $\psi(u,v)=e^u-u\cos v$. 于是,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=e^u+\sin v,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=u\cos v,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=e^u-\cos v,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=u\sin v,$$

$$I=(e^u+\sin v)u\sin v-(e^u-\cos v)u\cos v$$
$$=u[e^u(\sin v-\cos v)+1].$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{e^u-\cos u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{e^u+\sin v}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

3476. 函数 $u=u(x)$ 由方程组

$$u=f(x,\ y,\ z),\ g(x,\ y,\ z)=0,$$
$$h(x,\ y,\ z)=0$$

定义．求$\frac{du}{dx}$和$\frac{d^2u}{dx^2}$.

解 微分得

$$du=f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right.$$
$$\left.+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)f, \tag{1}$$

$$0=g'_x dx+g'_y dy+g'_z dz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right.$$
$$\left.+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)g,$$

$$0=h'_x dx+h'_y dy+h'_z dz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right.$$

$$\left.+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)h. \tag{3}$$

令$\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}=I_1$，$\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,x)}=I_2$，$\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}=I_3$，则由(2)，(3)可解得

$$dy=\frac{I_2}{I_1}dx,\quad dz=\frac{I_3}{I_1}dx.$$

将dy，dz代入(1)，得

$$du=f'_x dx+f'_y\cdot\frac{I_2}{I_1}dx+f'_z\cdot\frac{I_3}{I_1}dx$$

$$=\frac{1}{I_1}(I_1 f'_x+I_2 f'_y+I_3 f'_z)dx=\frac{I}{I_1}dx,$$

其中$I=\frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}$，于是，

$$\frac{du}{dx}=\frac{I}{I_1}.$$

对（1），（2），（3）式再求一次微分，得

$$d^2u=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f+f'_y d^2y$$

$$+f'_z d^2z, \tag{4}$$

$$0=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g+g'_y d^2y$$

$$+g'_z d^2 z, \tag{5}$$

$$0=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial z}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h+h'_y d^2 y$$

$$+h'_z d^2 z. \tag{6}$$

于是，

$$d^2 y=\frac{1}{I_1}\left[g'_z\cdot\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right.$$

$$\left.-h'_z\cdot\left(dx\frac{\sigma}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+\partial z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\right],$$

$$d^2 z=\frac{1}{I_1}\left[h'_y\cdot\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g-g'_y\right.$$

$$\left.\cdot\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+\partial y\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right].$$

令$\frac{\partial(h,f)}{\partial(y,z)}=I_4$，$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}=I_5$，并将 d^2y 及 d^2z 代入(4)，即得

$$d^2 u=\frac{1}{I_1}\left[I_1\cdot\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f\right.$$

$$+I_4\cdot\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g$$

$$\left.+I_6\cdot\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right],$$

再以 $dy=\frac{I_2}{I_1}dx$ 及 $dz=\frac{I_3}{I_1}dx$ 代入上式，即得

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\Big[I_1\cdot\Big(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\Big)^2 f$$

$$+I_4\cdot\Big(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\Big)^2 g$$

$$+I_5\cdot\Big(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\Big)^2 h\Big].$$

3417. 函数$u=u(x,y)$由方程组

$$u=f(x,y,z,t),\ g(y,z,t)=0,\ h(z,t)=0$$

定义．求$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 微分得

$$du=f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz+f'_t dt, \qquad (1)$$

$$0=\qquad g'_y dy+g'_z dz+g'_t dt, \qquad (2)$$

$$0=\qquad\qquad h'_z dz+h'_t dt. \qquad (3)$$

令$I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$，则由(2),(3)可解得

$$dz=\frac{1}{I_1}\cdot(-g'_y h'_t)dy,\ dt=\frac{1}{I_1}\cdot(g'_y h'_z)dy.$$

将dz及dt代入(1)式，得

$$du=f'_x dx+f'_y dy-\frac{g'_y}{I_1}(f'_z h'_t-f'_t h'_z)dy.$$

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=f'_y+g'_y\cdot\frac{I_2}{I_1},$$

其中 $I_2=\dfrac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}$.

3418. 设：

$$x=f(u,v,w),\ \ y=g(u,v,w),\ \ z=h(u,v,w).$$

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

解 微分得

$$dx=f'_u du+f'_v dv+f'_w dw,$$
$$dy=g'_u du+g'_v dv+g'_w dw,$$
$$dz=h'_u du+h'_v dv+h'_w dw.$$

令 $I=\dfrac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}$，则有

$$du=\frac{1}{I}\begin{vmatrix} dx & f'_v & f'_w \\ dy & g'_v & g'_w \\ dz & h'_v & h'_w \end{vmatrix}=\frac{I_1}{I}dx+\frac{I_2}{I}dy+\frac{I_3}{I}dz,$$

其中 $I_1=\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}$，$I_2=\dfrac{\partial(h,f)}{\partial(v,w)}$，$I_3=\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}$.

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{I_1}{I},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{I_2}{I},\ \ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{I_3}{I}.$$

3419. 设函数 $z=z(x,y)$ 满足方程组

$$f(x,y,z,t)=0,\ \ g(x,y,z,t)=0,$$

式中 t 为参变数. 求 dz.

解 微分得

$$f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz+f'_t dt=0,$$
$$g'_x dx+g'_y dy+g'_z dz+g'_t dt=0.$$

把 dz, dt 看作未知数，其它为系数．解之得

$$dz=\frac{1}{I_3}\left[f'_t\cdot(g'_x dx+g'_y dy)-g'_t\cdot(f'_x dx+f'_y dy)\right]$$
$$=\frac{1}{I^3}\left[(f'_t g'_x-g'_t f'_x)dx+(f'_t g'_y-g'_t f'_y)dy\right]$$
$$=-\frac{I_1 dx+I_2 dy}{I_3},$$

其中 $I_1=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}$，$I_2=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}$，$I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}$．

3420．设 $u=f(z)$，其中 z 为由方程式 $z=x+y\varphi(z)$ 所定义的为变数 x 和 y 的隐函数．证明拉格朗日公式

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n\frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

证 $dz=dx+\varphi(z)dy+y\varphi'(z)dz$．于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1-y\varphi'(z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}=\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial y}=f'(z)\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x},$$

即当 $n=1$ 时，拉格朗日公式为真．

对于任意可微函数 $g(z)$，有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[g(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=g'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+g(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$=\varphi(z)g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+g(z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\varphi(z)g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+g(z)\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$=\varphi(z)g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi'(z)g(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+\varphi(z)g(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)g(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

令 $g(z)=\varphi(z)$，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^2(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

即当 $n=2$时，拉格朗日公式也为真．设当 $n=k$ 时，公式为真，即有

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

于是，

$$\frac{\partial^{k+1}u}{\partial y^{k+1}}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^{k}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^{k+1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial^{k}}{\partial x^{k}}\left[\varphi^{k+1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

即当$n=k+1$时，拉格朗日公式也为真。于是，对于一切自然数n，均有

$$\frac{\partial^{n}u}{\partial y^{n}}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\varphi^{n}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

3421. 证明：由方程

$$\Phi(x-az,\ y-bz)=0 \tag{1}$$

〔其中$\Phi(u,v)$是变数u，v的任意可微分函数，a和b为常数〕所定义的函数$z=z(x,y)$为方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

的解。说明曲面(1)的几何性质。

解 由于

$$\Phi_1'\cdot\left(1-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)-b\Phi_2'\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$-\Phi_1'\cdot a\frac{\partial z}{\partial y}+\Phi_2'\cdot\left(1-b\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\Phi_1'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\Phi_2'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'}.$$

将上面二个等式依次乘以a,b,然后相加，即得

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

这就说明$z=z(x,y)$为方程$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$的解.

等式$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}-1=0$表示曲面（1）上任一点$P_1(x_1,y_1,z_1)$的法向量$\overrightarrow{n_1}=\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_1},\ \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_1},\ -1\right\}$皆与向量$\overrightarrow{r_1}=\{a,b,1\}$垂直. 过点$P_1$作平行于$\overrightarrow{r_1}$的直线$l_1$：

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{1}.$$

易知l_1上的点皆在曲面（1）上. 于是，曲面（1）是母线平行于$\overrightarrow{r_1}$的柱面.

3422. 证明：由方程

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\ \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0 \tag{2}$$

〔其中$\Phi(u,v)$是变数u和v的任意可微分函数〕所定义的函数$z=z(x,y)$满足方程式

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0.$$

说明曲面（2）的几何性质。

解 由于

$$\Phi_1'\cdot\frac{z-z_0-(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2}-\Phi_2'\cdot\frac{(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2}=0,$$

$$-\Phi_1'\cdot\frac{(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2}+\Phi_2'\cdot\frac{z-z_0-(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2}=0,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(z-z_0)\Phi_1'}{(x-x_0)\Phi_1'+(y-y_0)\Phi_2'},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(z-z_0)\Phi_2'}{(x-x_0)\Phi_1'+(y-y_0)\Phi_2'}.$$

将上面二个等式依次乘以 $x-x_0$ 及 $y-y_0$，然后相加，即得

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0,$$

本题获证。

等式 $(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}-(z-z_0)=0$ 表示曲面（2）在其上任一点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的法向量 $\vec{n}_2=\left\{\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_2},\ -1\right\}$ 与向量 $\vec{r}_2=\{x_2-x_0,\ y_2-y_0,\ z_2-z_0\}$ 垂直. 作过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$的直线 l_2：

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_0}=\frac{y-y_0}{y_2-y_0}=\frac{z-z_0}{z_2-z_0}.$$

易知 l_2 上的任一点皆在曲面(2)上．于是，曲面（2）是顶点在 P_0 的锥面．

3423. 证明：由方程

$$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2) \tag{3}$$

〔其中 $\Phi(u)$是变数 u 的任意可微分函数，a，b 和 c为常数〕所定义的函数 $z=z(x,y)$满足方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

说明曲面（3）的几何性质．

解 由于

$$a+c\frac{\partial z}{\partial x}=\Phi'\cdot\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$b+c\frac{\partial z}{\partial y}=\Phi'\cdot\left(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x\Phi'-a}{c-2z\Phi'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y\Phi'-b}{c-2z\Phi'}.$$

将上面二个等式依次乘以$(cy-bz)$及$(az-cx)$，然后相加，即得

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=\frac{(2x\Phi'-a)(cy-bz)+(2y\Phi'-b)(az-cx)}{c-2z\Phi'}$$

$$=\frac{(c-2z\Phi')(bx-ay)}{c-2z\Phi'}=bx-ay,$$

本题获证.

设 $P_3(x_3,y_3,z_3)$是曲面（3）上任意一点，并记$\vec{r}_3=\{a,b,c\}$. 由于曲面（3）在P_3点的法向量为$\vec{n}_3=\left\{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_3},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_3},\ -1\right\}$，故由方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}-(bx-ay)=0$$

知

$$\vec{n}_3\perp(\vec{P}_3\times\vec{r}_3),$$

其中$\vec{P}_3=\{x_3,y_3,z_3\}$.

设由原点到 P_3 的距离为 d，即

$$x_3^2+y_3^2+z_3^2=d^2.$$

考虑平面

$$\Pi:\quad ax+by+cz=d$$

和过点 P_3 的球面

$$S:\quad x^2+y^2+z^2=d^2,$$

并设平面 Π 与球面 S 的交线为 C，则

1°由点P_3 在曲面（3）上可知

$$ax_3+by_3+cz_3=\Phi(x_3^2+y_3^2+z_3^2),$$

即

$$d=\Phi(d^2).$$

这表明曲线 C 上的点的坐标皆满足方程（3），即曲线 C 位于曲面（3）上.

2°由Ⅱ为平面，S 为球面知交线 C 为一圆周曲线。

3°圆 C 的圆心 Q 即为由原点到平面Ⅱ的垂足，故 Q 点位于过原点且与平面Ⅱ垂直的直线 l 上。

综上所述，可见曲面（3）是以直线

$$l: \qquad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

为旋转轴的旋转曲面。

3424. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$$

所给出．证明：

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

证 由于

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial x},$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}.$$

同法可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-y^2+z^2-zf'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz-yf'\left(\frac{z}{y}\right)}.$$

于是，

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=\frac{2xy(y^2+z^2-x^2)+2xy(x^2-y^2+z^2-zf')}{y(2z-f')}$$

$$=\frac{2xyz(2z-f')}{y(2z-f')}=2xz,$$

本题获证.

3425. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$F(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$$

所给出. 证明:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

证 由于

$$F'_1\cdot\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2\cdot\left(\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}\right)=0,$$

$$F'_1\cdot\left(\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2}\right)+F'_2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yzF'_2-x^2yF'_1}{x(xF'_1+yF'_2)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xzF'_1-xy^2F'_2}{y(xF'_1+yF'_2)}.$$

于是,

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yzF'_2-x^2yF'_1+xzF'_1-xy^2F'_2}{xF'_1+yF'_2}$$

$$= \frac{(z-xy)(xF'_1+yF'_2)}{xF'_1+yF'_2} = z-xy,$$

本题获证.

3426. 证明：由方程组

$$\left.\begin{array}{l} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z = f(\alpha), \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = f'(\alpha) \end{array}\right\}$$

〔其中 $\alpha=\alpha(x, y)$ 为参变数及 $f(\alpha)$ 为任意可微分的函数〕所定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程式

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2.$$

证 由 $x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z = f(\alpha)$ 两端对 x 求偏导函数，得

$$\cos\alpha - x\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x} + y\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= f'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

由于 $-x\sin\alpha + y\cos\alpha = f'(\alpha)$，代入上式，即得

$$\cos\alpha + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -z\cos\alpha. \tag{1}$$

同法可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -z\sin\alpha. \tag{2}$$

将（1），（2）两式依次平方，然后相加，即得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2,$$

本题获证。

3427．证明：由方程组

$$\left.\begin{aligned}z&=\alpha x+\frac{y}{\alpha}+f(\alpha),\\0&=x-\frac{y}{\alpha^2}+f'(\alpha)\end{aligned}\right\}$$

所给出的函数 $z=z(x,\ y)$满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

证 由于

$$dz=\alpha dx+\frac{1}{\alpha}dy+\left[x-\frac{y}{\alpha^2}+f'(\alpha)\right]d\alpha$$

$$=\alpha dx+\frac{1}{\alpha}dy,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\alpha,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\alpha}.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,$$

本题获证。

3428．证明：由方程组

$$\left.\begin{aligned}&[z-f(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2),\\&[z-f(\alpha)]\,f'(\alpha)=\alpha x^2\end{aligned}\right\}$$

所定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

证 $2[z-f(\alpha)][dz-f'(\alpha)d\alpha]=(y^2-\alpha^2)2xdx+x^2(2ydy-2\alpha d\alpha)$. 于是,

$$[z-f(\alpha)]dz=x(y^2-\alpha^2)dx+x^2ydy-\{\alpha x^2-[z-f(\alpha)]f'(\alpha)\}d\alpha$$
$$=x(y^2-\alpha^2)dx+x^2ydy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x(y^2-\alpha^2)}{z-f(\alpha)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2y}{z-f(\alpha)}.$$

从而得

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3y(y^2-\alpha^2)}{[z-f(\alpha)]^2}$$

$$=xy\cdot\frac{x^2(y^2-\alpha^2)}{[z-f(\alpha)]^2}=xy,$$

本题获证.

3429. 证明：由方程组

$$\left.\begin{aligned}z&=\alpha x+y\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),\\0&=x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha)\end{aligned}\right\}$$

所给出的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=\alpha+x\frac{\partial \alpha}{\partial x}+y\varphi'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\psi'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial x}$

$$=\alpha+[x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha)]\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\alpha}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\alpha}{\partial y}.$$

又 $\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\varphi(\alpha)+y\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}$

$$+\psi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\varphi(\alpha),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\varphi'(\alpha)-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2$

$$=\frac{\partial\alpha}{\partial y}\left[\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right],$$

由于 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，故 $\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}$. 于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0^{*)},$$

本题获证.

*)此式也可由原方程组第二式两端分别对 x 和 y 求偏导函数而获得.

3430. 证明：由方程

$$y=x\varphi(z)+\psi(z)$$

所定义的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

证 记$\frac{\partial z}{\partial x}=p$，$\frac{\partial z}{\partial y}=q$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t$.

将所给方程两端分别对 x 和对 y 逐次求偏导数，得

$$\varphi(z)+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]p=0,$$

$$[x\varphi'(z)+\psi'(z)]q=1;$$

$$2\varphi'(z)p+[x\varphi''(z)+\psi''(z)]p^2+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]r=0, \tag{1}$$

$$\varphi'(z)q+[x\varphi''(z)+\psi''(z)]pq+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]s=0, \tag{2}$$

$$[x\varphi''(z)+\psi''(z)]q^2+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]t=0. \tag{3}$$

将（1），（2），(3) 三式依次乘以q^2，$(-2pq)$ 及 p^2，然后相加，并注意到$x\varphi'(z)+\psi'(z)\neq 0$（因为$[x\varphi'(z)+\psi'(z)]q=1$），即得

$$rq^2-2pqs+tp^2=0,$$

此即所要证明的.

§4. 变量代换

1° 在含有导函数的式子中的变量代换. 设于式

$$A=\Phi(x,y,y'_x,y''_{xx},\cdots)$$

中需要把 x,y 换为新的变量：t（自变量）及u（函数），这些变量由方程

$$x=f(t,u),\quad y=g(t,u) \tag{1}$$

与原来的变量 x 和 y 联系起来．

把方程式（1）微分，便有：

$$y'_x=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial t}+\dfrac{\partial g}{\partial u}u'_t}{\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_t}.$$

同样地可表示出高阶的导函数 y''_{xx}，…因此我们得：

$$A=\Phi_1(t,u,u'_t,u''_{tt},\cdots).$$

2° 在含有偏导函数的式子中自变量的代换．若于下式中

$$B=F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \cdots\right)$$

令

$$x=f(u,v),\quad y=g(u,v), \tag{2}$$

其中 u 和 v 为新的自变量，则挨次的偏导函数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，…由下列方程所确定：

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},$$

等等.

3° 在含有偏导函数的式子中自变量和函数的代换. 在一般的情况下，设有方程

$$x=f(u,v,w),\ y=g(u,v,w),\ z=h(u,v,w), \quad (3)$$

其中 u,v 为新的自变量及 $w=w(u,v)$ 为新的函数，则对于偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，…得到这样的方程：

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},$$

等等.

在某些情况下，使用全微分法进行变量代换是方便的.

3431. 把 y 看作新的自变量，变换方程

$$y'y\ -3y''^2=x.$$

解 函数 $y=y(x)$ 的各阶导函数 y', y'', y''', …与其反函数 $x=x(y)$ 的各阶导函数 x', x'', x''', … 之间有下述关系.

$$y'=\frac{1}{x'}, \qquad \text{公式 1}$$

$$y''=(y')'=\left(\frac{1}{x'}\right)'_y\cdot y'_x=-\frac{x''}{x'^2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=-\frac{x''}{(x')^3}, \qquad \text{公式 2}$$

$$y'''=(y'')'=-\left[\frac{x''}{(x')^3}\right]'_y\cdot y'_x$$

$$=\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}. \qquad \text{公式 3}$$

以公式 1 、 2 、 3 代入所给方程，化简整理即得

$$x'''+x(x')^5=0.$$

3432. 用同样的方法变换方程

$$(y')^2y^{(4)}-10y'y''y'''+15(y'')^3=0.$$

解 解法一

由公式 3 可得

$$y^{(4)}=(y''')'=\left[\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}\right]'_y y'_x$$

$$=\frac{6x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-x'x''x'''-5[3(x'')^2-x'x''']x''}{(x')^6}$$

$$\cdot\frac{1}{x'}=\frac{10x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-15(x'')^3}{(x')^7}. \qquad \text{公式 4}$$

以公式 1 、 2 、 3 、 4 代入所给方程，化简整理即得

$$x^{(4)}=0.$$

解法二

由公式 4 可看出

$$x^{(4)}=\frac{10y'y''y'''-(y')^2y^{(4)}-15(y'')^3}{(y')^7}.$$

因此，所给方程可改写为

$$-x^{(4)}(y')^7=0.$$

由于 $y'\neq 0$，故得

$$x^{(4)}=0.$$

3433. 取 x 作函数，$t=xy$ 作自变量，变换方程

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0.$$

解 将 $t=t(x)$看作 x 的函数. 对 $t=xy$ 两端分别求 x 的一阶、二阶导数，得

$$\frac{dt}{dx}=y+xy', \tag{1}$$

$$\frac{d^2t}{dx^2}=2y'+xy''. \tag{2}$$

由于$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\frac{dt}{dx}}$，故由（1）式得

$$y'=\frac{1-y\frac{dx}{dt}}{x\frac{dx}{dt}}. \tag{3}$$

由公式 2 及（2）式可得

$$-\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=2y'+xy'',$$

$$y''=-\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}-\frac{2y'}{x}. \tag{4}$$

将（4）式代入所给方程，得

$$-\frac{d^2x}{dt^2}+xy\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0\ 或\ \frac{d^2x}{dt^2}-t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0\ .$$

引入新变量，变换下列常微分方程：

3434. $x^2y''+xy'+y=0$，若 $x=e^t$.

解 当函数 y 不变，只作自变量的代换 $x=x(t)$ 时，注意到对 $\frac{dt}{dx}$，$\frac{d^2t}{dx^2}$ 运用公式 1 及 2，即得

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\qquad 公式\ 5$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2}$$

$$=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.\qquad 公式\ 6$$

在本题中，$x=e^t$，故有

$$\frac{dx}{dt}=e^t=x,\ \frac{d^2x}{dt^2}=e^t=x,$$

从而有

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{x},$$

$$y''=\frac{x\frac{d^2y}{dt^2}-x\frac{dy}{dt}}{x^3}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

将 y' 及 y'' 代入所给方程，即得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

3435. $y'''=\frac{6y}{x^3}$，若 $t=\ln|x|$.

解 应用复合函数求导公式，有

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x^2}\left(x\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}}{x^2},$$

$$y'''=\frac{1}{x^4}\left[x^2\left(\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dt}{dx}-2x\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right).$$

将 y''' 代入所给方程，即得

$$\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-6y=0.$$

3436. $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$，若 $x=\cos t$.

解 注意到 $\frac{dx}{dt}=-\sin t$，$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$，用公式5及6，就有

$$y'=-\frac{\frac{dy}{dt}}{\sin t},\quad y''=\frac{-\sin t\frac{d^2y}{dt^2}+\cos t\frac{dy}{dt}}{-\sin^3 t}.$$

将 y', y'' 及 x 代入所给方程，即得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0.$$

3437. $y''+y'\operatorname{th}x+\frac{m^2}{\operatorname{ch}^2x}y=0$，若 $x=\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}$.

解 仍用公式 5 及 6，注意到

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sin t},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\cos t}{\sin^2 t},$$

$$\operatorname{ch}x=\frac{1}{\sin t},\quad \operatorname{th}x=-\cos t,$$

就有

$$y'=\sin t\frac{dy}{dt},\quad y''=\sin^2 t\frac{d^2y}{dt^2}+\sin t\cos t\frac{dy}{dt}.$$

将 y', y'', $\operatorname{ch}x$ 及 $\operatorname{th}x$ 代入所给方程，即得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+m^2y=0.$$

3438. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$，令 $y=ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$.

解 $y'=\frac{du}{dx}e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}-\frac{1}{2}u\cdot p(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$

$$y''=\frac{d^2u}{dx^2}e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}-p(x)\frac{du}{dx}e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$$

$$+\frac{1}{4}u\cdot p^2(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$$

$$-\frac{1}{2}u\cdot p'(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt}.$$

将y',y''代入所给方程，化简整理即得

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left[q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]u=0.$$

3439. $x^4y''+xyy'-2y^2=0$. 令

$$x=e^t,\quad y=ue^{2t},$$

其中 $u=u(t)$.

解 $$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{2t}(2u+u')}{e^t}=e^t(2u+u'),$$

$$y''=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t(u''+3u'+2u)}{e^t}=u''+3u'+2u,$$

其中u'及u''表示u对t的一阶及二阶导函数，以下各题类似，不再说明.

将y',y''及x,y代入所给方程，化简整理即得

$$u''+(u+3)u'+2u=0.$$

3440. $(1+x^2)^2y''=y$，若

$$x=\operatorname{tg}t,\quad y=\frac{u}{\cos t},$$

其中 $u=u(t)$.

解 $$y'=\frac{\frac{u'\cos t+u\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}}=u'\cos t+u\sin t,$$

$$y''=\frac{u''\cos t+u\cos t}{\frac{1}{\cos^2 t}}=(u''+u)\cos^3 t.$$

将 y'，y''及x，y代入所给方程，化简整理即得

$$u''=0.$$

3441. $(1-x^2)^2y''=-y$，若

$$x=\text{th}\,t,\quad y=\frac{u}{\text{ch}\,t},$$

其中 $\qquad u=u(t)$。

解 $\quad y'=\frac{\frac{u'\text{ch}\,t-u\text{sh}\,t}{\text{ch}^2 t}}{\frac{1}{\text{ch}^2 t}}=u'\text{ch}\,t-u\text{sh}\,t,$

$$y''=\frac{u''\text{ch}\,t-u\text{ch}\,t}{\frac{1}{\text{ch}^2 t}}=(u''-u)\text{ch}^3 t.$$

将 y''及 x，y 代入所给方程，化简整理即得

$$u''=0.$$

3442. $y''+(x+y)(1+y')^3=0$，若$x=u+t$，$y=u-t$，其中$u=u(t)$。

解 $\quad y'=\frac{u'-1}{u'+1}$，

$$y''=\frac{\frac{u''(u'+1)-u''(u'-1)}{(u'+1)^2}}{u'+1}=\frac{2u''}{(u'+1)^3}.$$

将 y', y'' 及 x, y 代入所给方程，化简整理即得

$$u''+8u(u')^3=0 .$$

3443. $y'''-x^3y''+xy'-y=0$，若 $x=\frac{1}{t}$ 及 $y=\frac{u}{t}$，其中 $u=u(t)$。

解 $$y'=\frac{\frac{u't-u}{t^2}}{-\frac{1}{t^2}}=u-tu',$$

$$y''=\frac{-tu''}{-\frac{1}{t^2}}=t^3u'',$$

$$y'''=\frac{3t^2u''+t^3u'''}{-\frac{1}{t^2}}=-t^4(3u''+tu\ \ ).$$

将 y', y'', y 及 x, y 代入所给方程，化简整理即得

$$t^5u\ \ +(3t^4+1)u''+u'=0 .$$

3444. 假定

$$u=\frac{y}{x-b},\ t=\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|,$$

并取 u 作为变量 t 的函数，以变换斯托克斯方程

$$y''=\frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}.$$

解 由于 $t=\ln|x-a|-\ln|x-b|$，故有

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{(x-a)(x-b)}$$

或 $$\frac{dx}{dt}=\frac{(x-a)(x-b)}{a-b}. \qquad (1)$$

又因 $u=\frac{y}{x-b}$，故 $y=u(x-b)$，

$$y'=(x-b)\frac{du}{dx}+u=\frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}}(x-b)+u$$

$$=\frac{(a-b)u'}{x-a}+u, \qquad (2)$$

$$y''=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\left[\frac{(a-b)u''}{x-a}+u'-\frac{(a-b)u'}{(x-a)^2}\frac{dx}{dt}\right]$$

$$\cdot\frac{b-a}{(x-a)(x-b)}=\frac{(a-b)^2(u''-u')}{(x-a)^2(x-b)}. \qquad (3)$$

将(3)式代入所给方程，即得

$$u''-u'=\frac{Au}{(a-b)^2} \qquad (a\neq b).$$

3445. 证明：若方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0,$$

由代换 $x=\varphi(\xi)$变换为方程

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+P(\xi)\frac{dy}{d\xi}+Q(\xi)y=0,$$

则

$$[2P(\xi)Q(\xi)+Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}}$$
$$=[2p(x)q(x)+q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}}.$$

证 $\dfrac{dx}{d\xi}=\varphi'(\xi)$，$\dfrac{d^2x}{d\xi^2}=\varphi''(\xi)$. 由公式5及6，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\xi}}{\varphi'(\xi)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{[\varphi'(\xi)]^2}\frac{d^2y}{d\xi^2}$$
$$-\frac{\varphi''(\xi)}{[\varphi'(\xi)]^3}\frac{dy}{d\xi}.$$

代入原方程，两端同乘$[\varphi'(\xi)]^2$，即得

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\left\{p[\varphi(\xi)]\varphi'(\xi)-\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)}\right\}\frac{dy}{d\xi}$$
$$+q[\varphi(\xi)][\varphi'(\xi)]^2y=0.$$

于是，

$$P(\xi)=p\varphi'-\frac{\varphi''}{\varphi'},\quad Q(\xi)=q\cdot(\varphi')^2;$$

$$Q'(\xi)=q'\cdot(\varphi')^3+2q\varphi'\varphi''.$$

从而得知

$$[2P(\xi)Q(\xi)+Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}}$$
$$=\left\{2\left(p\varphi'-\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)q\cdot(\varphi')^2+q'\cdot(\varphi')^3\right.$$
$$\left.+2q\varphi'\varphi''\right\}[q\cdot(\varphi')^2]^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\{2pq\cdot(\varphi')^3+q'\cdot(\varphi')^3\}q^{-\frac{3}{2}}\cdot(\varphi')^{-3},$$

$$=[2p(x)q(x)+q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}},$$

本题获证。

3446. 在方程

$$\Phi(y,\ y',\ y'')=0$$

（其中Φ为变量 y, y', y''的齐次函数）中令$y=e^{\int_{x_0}^{x}u\,dx}$。

解 $y'=u\cdot e^{\int_{x_0}^{x}u\,dx}$，$y''=(u'+u^2)e^{\int_{x_0}^{x}u\,dx}$。

代入方程$\Phi(y,y',y'')=0$，由于Φ关于y, y', y''是齐次的，因此，各项含有的因式$e^{\int_{x_0}^{x}u\,dx}$均可约去，最后得

$$\Phi(1,u,u'+u^2)=0\,.$$

3447. 在方程

$$F(x^2y'',\ xy',\ y)=0$$

（其中F为其变量的齐次函数）中令$u=x\cdot\frac{y'}{y}$。

解 $y'=\frac{yu}{x}$，$y''=\frac{x(u'y+y'u)-yu}{x^2}$

$$=\frac{y[xu'+(u^2-u)]}{x^2}.\ 于是,$$

$$xy'=uy,\quad x^2y''=y[xu'+(u^2-u)].$$

由于F为其变量的齐次函数，因此，各项含有的因子y均可约去，最后得

$$F(xu'+u^2-u,u,1)=0\,.$$

3448．证明：经射影变换

$$x=\frac{a_1\xi+b_1\eta+c_1}{a\xi+b\eta+c},\quad y=\frac{a_2\xi+b_2\eta+c_2}{a\xi+b\eta+c},$$

方程式

$$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$$

不变其形状．

证 本题似有误．事实上，作压缩变换

$x=\xi,\quad y=a\eta\quad(a\neq 0)$

（它是射影变换的特例），则原方程变为

$a\eta'''(1+a\eta'^2)-3a^3\eta'\eta''^2=0,$

显然形式已改变．

3449．证明：

$$S[x(t)]=\frac{x'''(t)}{x'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2$$

对于线性分式变换

$$y=\frac{ax(t)+b}{cx(t)+d}\quad(ad-bc\neq 0),$$

其值不变．

证 已知的变换

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+\left(b-\frac{ad}{c}\right)}{cx+d}$$

$$=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

可由下述变换所构成：

$$y=\alpha+\beta y_2,\ y_2=\frac{1}{y_1},\ y_1=cx+d.$$

只要证明在上述各种变换下 S 的值不变即可.

1° 令 $y_1=cx+d$, 则 $y_1'(t)=cx'(t)$, $y_1''(t)=cx''(t)$, $y_1'''(t)=cx'''(t)$. 于是,

$$S[y_1(t)]=\frac{y_1'''(t)}{y_1'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{y_1''(t)}{y_1'(t)}\right]^2$$

$$=\frac{x'''(t)}{x'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2=S[x(t)];$$

2° 令 $y_2=\frac{1}{y_1}$, 则 $y_2'(t)=-\frac{y_1'}{y_1^2}$,

$$y_2''(t)=-\frac{y_1y_1''-2y_1'^2}{y_1^3},$$

$$y_2'''(t)=-\frac{y_1'''y_1^2-6y_1''y_1'y_1+6y_1'^3}{y_1^4}.$$ 于是,

$$S[y_2(t)]=\frac{y_2'''(t)}{y_2'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{y_2''(t)}{y_2'(t)}\right]^2$$

$$=\frac{\dfrac{y_1'''y_1^2-6y_1''y_1'y_1+6y_1'^3}{y_1^4}}{\dfrac{y_1'}{y_1^2}}-\frac{3}{2}\left[\frac{\dfrac{y_1y_1''-2y_1'^2}{y_1^3}}{\dfrac{y_1'}{y_1^2}}\right]^2$$

$$=\frac{y_1'''}{y_1'}-\frac{6y_1''}{y_1}+\frac{6y_1'^2}{y_1^2}-\frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}-\frac{2y_1'}{y_1}\right)^2$$

$$=\frac{y_1'''}{y_1'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}\right)^2=S[y_1(t)]=S[x(t)];$$

3° 由1°及2°即知

$$S[y(t)]=S[\alpha+\beta y_2]=\frac{(\alpha+\beta y_2)'''}{(\alpha+\beta y_2)'}$$

$$-\frac{3}{2}\left\{\frac{(\alpha+\beta y_2)''}{(\alpha+\beta y_2)'}\right\}^2$$

$$=\frac{y_2'''}{y_2'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y_2''}{y_2'}\right)^2=S[y_2(t)]=S[x(t)].$$ 证毕.

将下列方程式改变为极坐标 r 与 φ 所表示的方程，即令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$:

3450. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$.

解 当 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$时，

$$\frac{dx}{d\varphi}=\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi,\ \frac{dy}{d\varphi}=\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}=\cos\varphi\frac{d^2r}{d\varphi^2}-2\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2}=\sin\varphi\frac{d^2r}{d\varphi^2}+2\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi.$$

由公式 5 及 6，即得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi},\qquad \text{公式 7}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{d\varphi^2}\frac{dx}{d\varphi}-\frac{dy}{d\varphi}\frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^3}$$

$$=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left(\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi\right)^3}. \qquad \text{公式 8}$$

将公式 7 及x, y代入所给方程，化简整理即得

$$\frac{dr}{d\varphi}=r \text{ 或 } r'=r.$$

以下各题，$\frac{dr}{d\varphi}$及$\frac{d^2r}{d\varphi^2}$均简记为r'及r''.

3451. $(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2)$.

解 $xy'-y=r\cos\varphi\cdot\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}-r\sin\varphi$

$$=\frac{r(r'\sin\varphi\cos\varphi+r\cos^2\varphi-r'\sin\varphi\cos\varphi+r\sin^2\varphi)}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$$

$$=\frac{r^2}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi},$$

$$1+y'^2=1+\left(\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}\right)^2$$

$$=\frac{r'^2+r^2}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^2}.$$

将$xy'-y, 1+y'^2$及x，y代入所给方程，化简整理即得

$$r'^2=\frac{1-\sin2\varphi}{\sin2\varphi}r^2.$$

3452. $(x^2+y^2)^2 y''=(x+yy')^3$.

解 $x+yy'=r\cos\varphi+r\sin\varphi\cdot\dfrac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$

$$=\frac{rr'\cos^2\varphi-r^2\sin\varphi\cos\varphi+rr'\sin^2\varphi+r^2\sin\varphi\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$$

$$=\frac{rr'}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}.$$

将公式 8，$x+yy'$及x，y代入所给方程，化简整理即得

$$r(r^2+2r'^2-rr'')=r'^3.$$

3453. 把式子

$$\frac{x+yy'}{xy'-y}$$

变换为极坐标的式子.

解 将 3451 题中 $xy'-y$ 的结果及3452题中 $x+yy'$ 的结果代入所给式子，即得

$$\frac{x+yy'}{xy'-y}=\frac{r'}{r}.$$

3454. 把平面曲线的曲率

$$K=\frac{|y''_{xx}|}{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}$$

用极坐标 r 及 φ 表示之.

解 将 3451 题中 $1+y'^2$的结果及公式 8 代入，化简整理即得

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3455. 将方程组

$$\frac{dx}{dt}=y+kx(x^2+y^2),$$

$$\frac{dy}{dt}=-x+ky(x^2+y^2)$$

改变为极坐标方程.

解 由原方程组得

$$\cos\varphi\frac{dr}{dt}-r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}=r\sin\varphi+kr^3\cos\varphi,$$

$$\sin\varphi\frac{dr}{dt}+r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}=-r\cos\varphi+kr^3\sin\varphi.$$

联立解之，即得

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{r}[r\cos\varphi\cdot(r\sin\varphi+kr^3\cos\varphi)$$

$$-(-r\sin\varphi)(-r\cos\varphi+kr^3\sin\varphi)]=kr^3,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{r}[\cos\varphi\cdot(-r\cos\varphi+kr^3\sin\varphi)$$

$$-\sin\varphi\cdot(r\sin\varphi+kr^3\cos\varphi)]=-1,$$

即原方程组转化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{dr}{dt}=kr^3, \\
\dfrac{d\varphi}{dt}=-1.
\end{cases}
$$

3456. 引用新函数$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$，变换式子

$$W=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}.$$

解 由$r=\sqrt{x^2+y^2}$两端微分，得

$$dr=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy$$

或

$$rdr=xdx+ydy. \tag{1}$$

由$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$两端微分，得

$$d\varphi=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{x}{r^2}dy-\frac{y}{r^2}dx$$

或

$$r^2d\varphi=xdy-ydx. \tag{2}$$

于是，由(1)及(2)可得

$$xrdr-yr^2d\varphi=(x^2dx+xydy)-(xydy-y^2dx)$$
$$=(x^2+y^2)dx=r^2dx,$$

$$dx=\frac{x}{r}dr-yd\varphi. \tag{3}$$

同理可得

$$dy=\frac{y}{r}dr+xd\varphi. \tag{4}$$

从而由(3)及(4)，得

$$xd^2y-yd^2x=x\left(\frac{y}{r}d^2r-\frac{y}{r^2}dr^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}drdy+dxd\varphi+xd^2\varphi\right)$$

$$-y\left(\frac{x}{r}d^2r-\frac{x}{r^2}dr^2+\frac{1}{r}dxdr-dyd\varphi-yd^2\varphi\right)$$

$$=\frac{dr}{r}(xdy-ydx)+(xdx+ydy)d\varphi$$

$$+(x^2+y^2)d^2\varphi$$

$$=\frac{dr}{r}(r^2d\varphi)+(rdr)d\varphi+r^2d^2\varphi$$

$$=2rdrd\varphi+r^2d^2\varphi,$$

于是，

$$W=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=2r\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+r^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

3457．在勒襄德变换中曲线 $y=y(x)$ 的每一点 (x,y) 对应于点 (X,Y)，其中

$$X=y',\quad Y=xy'-y.$$

求 Y'，Y'' 及 Y'''。

解 $Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{dY}{dx}\cdot\frac{dx}{dX}=\frac{xy''}{\frac{dX}{dx}}=\frac{xy''}{y''}=x$;

$$Y''=\frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}}=\frac{1}{y''};$$

$$Y'''=\frac{\frac{dY''}{dx}}{\frac{dX}{dx}}=\frac{-\frac{y'''}{y''^2}}{y''}=-\frac{y'''}{y''^3}.$$

引入新变量 ξ 及 η，解下列方程：

3458. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$，令$\xi=x+y,\eta=x-y$.

解 当仅作自变量代换，引入新自变量

$$\xi=\xi(x,y),\quad \eta=\eta(x,y)$$

这个最简单的情形时，只要把ξ，η看作中间变量，用复合函数求偏导函数的公式，即可求出：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

代入原方程，即得变换后的方程．本题中，

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial \eta}{\partial y}=-1.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程，得

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\text{或}\frac{\partial z}{\partial \eta}=0,$$

即

$$z=\varphi(\xi)=\varphi(x+y),$$

其中 φ 为任意的函数.

3459. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$，令 $\xi=x$，$\eta=x^2+y^2$.

解 $\frac{\partial \xi}{\partial x}=1$，$\frac{\partial \xi}{\partial y}=0$，$\frac{\partial \eta}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial \eta}{\partial y}=2y$.

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+2x\frac{\partial z}{\partial \eta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程，得

$$y\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}+2x\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)-2xy\frac{\partial z}{\partial \eta}=0\text{ 或 }y\frac{\partial z}{\partial \xi}=0.$$

由于 $y\neq 0$，故 $\frac{\partial z}{\partial \xi}=0$，即

$$z=\varphi(\eta)=\varphi(x^2+y^2),$$

其中 φ 为任意的函数.

3460. $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$ $(a\neq 0)$，令 $\xi=x$，$\eta=y-bz$.

解 当变量间的变换关系比较复杂时，用全微分法较好．首先，根据新旧变元之间的关系，求出它们微分之间的关系

$$d\xi=dx,\ d\eta=dy-bdz. \tag{1}$$

其次，将所求得的微分式代入表示新变元关系的全微分式，并按旧变元关系重新整理．

$$dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta=\frac{\partial z}{\partial \xi}dx+\frac{\partial z}{\partial \eta}(dy-bdz),$$

$$\left(1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}dx+\frac{\partial z}{\partial \eta}dy,$$

$$dz=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial \xi}}{1+b\dfrac{\partial z}{\partial \eta}}dx+\frac{\dfrac{\partial z}{\partial \eta}}{1+b\dfrac{\partial z}{\partial \eta}}dy.$$

把整理后的式子与表示旧变元的全微分式

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

比较，即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial \xi}}{1+b\dfrac{\partial z}{\partial \eta}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial \eta}}{1+b\dfrac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

代入原方程，得

$$a\frac{\partial z}{\partial \xi}+b\frac{\partial z}{\partial \eta}=1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}\text{或}\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{1}{a}.$$

于是，

$$z=\frac{\xi}{a}+\varphi(\eta)=\frac{x}{a}+\varphi(y-bz).$$

3461. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$，令 $\xi=x$ 及 $\eta=\frac{y}{x}$.

解 $\frac{\partial \xi}{\partial x}=1$，$\frac{\partial \xi}{\partial y}=0$，$\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$，$\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \eta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程，得

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)+\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial \eta}=z,$$

$$x\frac{\partial z}{\partial \xi}=z\text{或}\xi\frac{\partial z}{\partial \xi}=z.$$

解之，得

$$z=\xi\varphi(\eta)=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

取 u 与 v 作新的自变量，变换下列方程式：

3462. $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=xy$，若 $u=\ln x$，$v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=0$，$\frac{\partial v}{\partial x}=0$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

注意到 $x=e^u$及$y=\mathrm{sh}v$，代入原方程，即得

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\mathrm{sh}v.$$

3463. $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$，若 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，

$v=\mathrm{arc\ tg}\frac{y}{x}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{dx}=\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，得

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}\left(x\frac{\partial z}{\partial u}-y\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{x-y}{x^2+y^2}$$

$$\cdot\left(y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=0\text{ 或 }\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

3464. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，若 $u=\frac{y}{x}$，$v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解 本解用微分法较好。

$$du=\frac{xdy-ydx}{x^2},$$

$$dv=dz+\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=dz+\frac{xdx+ydy+zdz}{r}$$

$$(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{dy}{x}-\frac{ydx}{x^2}\right)$$

$$+\frac{\partial z}{\partial v}\left(dz+\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy+\frac{z}{r}dz\right).$$

于是，

$$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz=\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx$$

$$+\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}.$$

代入原方程，得

$$x\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)+y\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$=(z+r)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$2(z+r)\frac{\partial z}{\partial v}=z+r.$$

如果$z+r=0$，则可推得$x^2+y^2=0$；但由于$x\neq 0$，所以x^2+y^2不可能为零．于是，$z+r\neq 0$，从而得

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}.$$

3465．$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z}$，若$u=2x-z^2$，$v=\frac{y}{z}$．

解 $du=2dx-2zdz$，$dv=\frac{dy}{z}-\frac{y}{z^2}dz$．

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial u}(2dx-zdz)$$

$$+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{z}dy-\frac{y}{z^2}dz\right).$$

于是，

$$\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz=2\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial u}\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}.$$

代入原方程，得

$$2x\frac{\partial z}{\partial u}+y\cdot\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{x}{z}\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\left(\frac{y}{z}-\frac{xy}{z^3}\right)\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{x}{z}.$$

再以$y=zv$，$x=\frac{1}{2}(u+z^2)$代入上式，最后得

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{z}{v}\cdot\frac{z^2+u}{z^2-u}.$$

3466⁺. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y+z$，若$u=x+z$，$v=y+z$.

解 $$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial u}(dx+dz)+\frac{\partial z}{\partial v}(dy+dz).$$

于是，

$$\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz=\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}.$$

将$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入原方程，并注意到$x+y+z=u+v-z$，即得

$$u\frac{\partial z}{\partial u}+v\frac{\partial z}{\partial v}=(u+v-z)\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$(2u+v-z)\frac{\partial z}{\partial u}+(2v+u-z)\frac{\partial z}{\partial v}=u+v-z.$$

3467．取

$$\xi=y+ze^{-x},\quad \eta=x+ze^{-y}$$

作为新的自变量，变换式子

$$(z+e^{x})\frac{\partial z}{\partial x}+(z+e^{y})\frac{\partial z}{\partial y}=(z^{2}-e^{x+y}).$$

解 $dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta$

$$=\frac{\partial z}{\partial \xi}\left(dy+e^{-x}dz-ze^{-x}dx\right)+\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\cdot(dx+e^{-y}dz-ze^{-y}dy).$$

于是，

$$\left(1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)dz=\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}-ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)dx$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}-ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\left(1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\left(1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^{-1}.$$

代入原式，化简整理即得

$$原式=\frac{e^{x+y}-z^2}{1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

3468. 假定

$$x=uv,\quad y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$$

变换式子

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

解 $dx=vdu+udv$，$dy=udu-vdv$。解之，得

$$du=\frac{vdx+udy}{u^2+v^2},\quad dv=\frac{udx-vdy}{u^2+v^2}.$$

于是，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial z}{\partial u}(vdx+udy)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial z}{\partial v}(udx-vdy)\right]$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx+\left(u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}\right)dy\right],$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[\left(v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right].$$

3469. 于方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

中令 $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\xi=z-x$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

三式相加即得

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=0.$$

3470. 取 x 作为函数，而 y 和 z 作为自变量，变换方程

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

解 $$dx=\frac{\partial x}{\partial y}dy+\frac{\partial x}{\partial z}dz,\ dz=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}dx-\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}dy.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}.$$

代入原方程，得

$$(x-z)\cdot\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}-y\cdot\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}=0,$$

即

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y} \quad (y\neq 0).$$

3471. 取 x 作为函数，而 $u=y-z$，$v=y+z$ 作为自变量，变换方程

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

解 $du=dy-dz$，$dv=dy+dz$.

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv=\frac{\partial x}{\partial u}(dy-dz)$$

$$+\frac{\partial x}{\partial v}(dy+dz).$$

于是,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}\right)dz=-dx+\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}\right)dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}}.$$

代入原方程，去分母，即得

$$\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u}{v}\quad (v\neq 0).$$

3472⁺. 取 x 作为函数及 $u=xz$，$v=yz$ 作为自变量，变换式子

$$A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

解 $du=xdz+zdx$，$dv=ydz+zdy$.

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv=\frac{\partial x}{\partial u}(xdz+zdx)$$

$$+\frac{\partial x}{\partial v}(ydz+zdy).$$

于是，

$$\left(x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}\right)dz=\left(1-z\frac{\partial x}{\partial u}\right)dx-z\frac{\partial x}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-z\frac{\partial x}{\partial u}}{x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z\frac{\partial x}{\partial v}}{x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}}.$$

代入原式，即得

$$A=\frac{\left(1-z\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+z^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}{\left(x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$$

$$=\frac{1-2z\frac{\partial x}{\partial u}+z^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{\left(x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$$

$$=\frac{1-2\cdot\frac{u}{x}\frac{\partial x}{\partial u}+\left(\frac{u}{x}\right)^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{x^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{v}{u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$$

$$=\frac{u^2\left\{x^2-2xu\frac{\partial x}{\partial u}+u^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]\right\}}{x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}.$$

3473. 于方程

$$(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$$

中，令： $e^{\xi}=x-u$, $e^{\eta}=y-u$, $e^{\zeta}=z-u$.

解 $du=\frac{\partial u}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial u}{\partial \eta}\partial\eta+\frac{\partial u}{\partial \zeta}d\zeta$

$$=\frac{\partial u}{\partial \xi}e^{-\xi}(dx-du)+\frac{\partial u}{\partial \eta}e^{-\eta}(dy-du)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \zeta}e^{-\zeta}(dz-du).$$

于是，

$$\left(1+e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)du$$

$$=e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}dx+e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}dy+e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}dz.$$

将由上式所确定的$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial u}{\partial z}$代入原方程，即得

$$(y+z+u)e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+(x+z+u)e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$+(x+y+u)e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

$$=(x+y+z)\left(1+e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right).$$

消去同类项，得

$$(x-u)e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+(y-u)e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+(z-u)e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

$$+(x+y+z)=0,$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}+3u+e^{\xi}+e^{\eta}+e^{\zeta}=0.$$

于下列方程中，代入新的变量 u，v，w，其中 $w=w(u,v)$：

3474．$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$，令$u=x^2+y^2$，$v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，$w=\ln z-(x+y)$.

解 $du=2xdx+2ydy$，$dv=-\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{y^2}dy$，

$$dw=\frac{1}{z}dz-dx-dy.$$

另一方面，$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$，故有

$$\frac{1}{z}dz-dx-dy=\frac{\partial w}{\partial u}(2xdx+2ydy)$$

$$+\frac{\partial w}{\partial v}\left(-\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{y^2}dy\right).$$

整理得

$$dz=\left(2xz\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{z}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+z\right)dx$$

$$+\left(2yz\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{z}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+z\right)dy.$$

将由上式所确定的$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入原方程，得

$$yz\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)$$

$$-xz\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)$$

$$=(y-x)z,$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

3475. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$，令 $u=x$，$v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$，

$$w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}.$$

解 $du=dx$，$dv=\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{y^2}dy$，$dw=\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{z^2}dz$。于是，

$$\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{z^2}dz=\frac{\partial w}{\partial u}dx+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{y^2}dy\right),$$

$$dz=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx+\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

代入原方程，得

$$z^2\left(1-x^2\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)+z^2\frac{\partial w}{\partial v}=z^2$$

或
$$x^2z^2\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

由于 $z\neq 0$，$x\neq 0$，故得

$$\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

3476. $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz$，设$u=yz-x$，$v=xz-y$，$w=xy-z$。

解 $dw=ydx+xdy-dz=\frac{\partial w}{\partial u}(zdy+ydz-dx)$

$$+\frac{\partial w}{\partial v}(zdx+xdz-dy).$$

整理得

$$\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)dz=\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx$$

$$+\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)dy.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{dw}{\partial u}\right)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1}.$$

代入原方程，得

$$(xy+z)\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

$$+(1-y^2)\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$=(x+yz)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$

即

$$(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

不难验证，由方程 $1-x^2-y^2-z^2-2xyz=0$ 所确定的隐函数不是原方程的解（证略）．于是，

$$\frac{\partial w}{\partial v}=0 .$$

3477. $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$，令$x=ue^w$，$y=ve^w$，$z=we^w$。

解 $dx=e^w du+ue^w dw$，$dy=e^w dv+ve^w dw$，

$dz=e^w(1+w)dw$。

于是，有

$$e^w dw=\frac{1}{1+w}dz,$$

$$e^w du=dx-ue^w dw=dx-\frac{u}{1+w}dz,$$

$$e^w dv=dy-ve^w dw=dy-\frac{v}{1+w}dz.$$

在全微分式$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$的两端都乘以$e^w$，并将上述结果代入，得

$$\frac{dz}{1+w}=\frac{\partial w}{\partial u}\left(dx-\frac{u}{1+w}dz\right)$$

$$+\frac{\partial w}{\partial v}\left(dy-\frac{v}{1+w}dz\right)$$

或

$$\left(1+u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial v}\right)dz=(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}dx$$

$$+(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}dy.$$

将由上式所确定的$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入原方程，得

$$\left[ue^w(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}\right]^2+\left[ve^w(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}\right]^2$$

$$=(we^w)^2(1+w)^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

消去$[e^w(1+w)]^2$，即得

$$u^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

3478．假定$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$v=\operatorname{arc\,tg} z$，$w=x+y+z$，其中$w=w(u,v)$，变换式子

$$(x-y):\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

解 $dw=dx+dy+dz=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$

$$=\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dz}{1+z^2}\right).$$

于是，

$$\left(1-\frac{1}{1+z^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dz=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}-1\right)dx$$

$$+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}-1\right)dy.$$

将由上式所确定的$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入所给式子，即得

$$\frac{x-y}{\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{(x-y)\left(1-\frac{1}{1+z^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)}{\frac{x-y}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}}$$

$$=\frac{\left(1-\cos^2 v\frac{\partial w}{\partial v}\right)e^{2u}}{\frac{\partial w}{\partial u}}.$$

3479．假定$u=xe^z$，$v=ye^z$，$w=ze^z$，其中$w=w(u,v)$．变换式子

$$A=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 $dw=e^z(1+z)dz=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$

$$=\frac{\partial w}{\partial u}(e^z dx+xe^z dz)+\frac{\partial w}{\partial v}(e^z dy+ye^z dz).$$

于是，

$$\left(1+z-x\frac{\partial w}{\partial u}-y\frac{\partial w}{\partial v}\right)dz=\frac{\partial w}{\partial u}dx+\frac{\partial w}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{1+z-x\frac{\partial w}{\partial u}-y\frac{\partial w}{\partial v}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{1+z-x\frac{\partial w}{\partial u}-y\frac{\partial w}{\partial v}},$$

$$A=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}:\frac{\partial w}{\partial v}.$$

3480. 在方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$$

中令：$\xi=\frac{x}{z}$, $\eta=\frac{y}{z}$, $\zeta=z$, $w=\frac{u}{z}$,

其中 $w=w(\xi, \eta, \zeta)$.

解 $dw=\frac{zdu-udz}{z^2}=\frac{\partial w}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial w}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial w}{\partial \zeta}d\zeta$

$$=\frac{\partial w}{\partial \xi}\left(\frac{zdx-xdz}{z^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial \eta}\left(\frac{zdy-ydz}{z^2}\right)$$

$$+\frac{\partial w}{\partial \zeta}dz.$$

两端同乘 z^2，整理得

$$zdu=z\frac{\partial w}{\partial \xi}dx+z\frac{\partial w}{\partial \eta}dy+\left(u-x\frac{\partial w}{\partial \xi}-y\frac{\partial w}{\partial \eta}\right.$$

$$\left.+z^2\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)dz.$$

将由上式所确定的$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial u}{\partial z}$代入原方程，得

$$x\frac{\partial w}{\partial \xi}+y\frac{\partial w}{\partial \eta}+\left(u-x\frac{\partial w}{\partial \xi}-y\frac{\partial w}{\partial \eta}+z^2\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)$$

$$=u+\frac{xy}{z},$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta}=\frac{xy}{z^3}=\frac{\xi\eta}{\zeta}.$$

假定 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, 改变下列各式为极坐标 r 和 φ所表示的式子.

3481. $w=x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

解 $dx=\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi$,

$dy=\sin\varphi dr+r\cos\varphi d\varphi$.

联立解之，得

$$dr=\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy,\quad d\varphi=\frac{x}{r^2}dy-\frac{y}{r^2}dx.$$

于是,

$$du=\frac{\partial u}{\partial r}dr+\frac{\partial u}{\partial \varphi}d\varphi$$

$$=\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)dx+\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)dy,$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{y}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{x}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}.\end{cases}\qquad \text{公式 9}$$

将公式 9 代入原式，即得

$$w=x\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)-y\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

3482. $w=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 将公式 9 代入，即得

$$w=x\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+y\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)$$

$$=r\frac{\partial u}{\partial r}.$$

3483. $w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

解 $w=\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2.$$

3484. $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

解 先导出极坐标变换的所有二阶偏导函数的变换式．将 r，φ 看作中间变量，x，y 看作自变量．由于

$$d^2r=d(dr)=d\left(\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy\right)$$

$$=\frac{1}{r}(dx^2+dy^2)-\frac{xdx+ydy}{r^2}dr$$

$$=\frac{1}{r}(dx^2+dy^2)-\frac{1}{r^3}(xdx+ydy)^2$$

$$=\frac{1}{r^3}(ydx-xdy)^2,$$

$$d^2\varphi=d(d\varphi)=d\left(\frac{x}{r^2}dy-\frac{y}{r^2}dx\right)$$

$$=-\frac{2(xdy-ydx)}{r^3}dr$$

$$=-\frac{2}{r^4}(xdy-ydx)(xdx+ydy),$$

故有

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}dr^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}drd\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}d\varphi^2$$

$$+\frac{\partial u}{\partial r}d^2r+\frac{\partial u}{\partial\varphi}d^2\varphi$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\left(\frac{xdx+ydy}{r}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}$$

$$\cdot\left(\frac{xdx+ydy}{r}\right)\left(\frac{xdy-ydx}{r^2}\right)$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{xdy-ydx}{r^2}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{(ydx-xdy)^2}{r^3}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(-\frac{2}{r^4}\right)(xdy-ydx)(xdx+ydy).$$

将上式右端按dx^2，$dxdy$，dy^2合并同类项，并与全微分式

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

比较，即得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{x^2}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\dfrac{2xy}{r^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\dfrac{y^2}{r^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\ \qquad+\dfrac{y^2}{r^3}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{2xy}{r^4}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{y^2}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{2xy}{r^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\dfrac{x^2}{r^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\ \qquad+\dfrac{x^2}{r^3}\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{2xy}{r^4}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}, \qquad\qquad \text{公式10}\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{xy}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{x^2-y^2}{r^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}-\dfrac{xy}{r^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\ \qquad-\dfrac{xy}{r^3}\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{x^2-y^2}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}.\end{cases}$$

将公式10代入原式，即得

$$w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

3485. $w=x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

解 将公式10代入原式，化简整理得

$$w=r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

3486. $w=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$-\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

解 将公式10中的 u 换成 z，然后代入原式，化简整理得

$$w=\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}.$$

3487. 在式子

$$I=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

中，令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$.

解 对函数 u 及 v 分别用公式9，即得

$$I=\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{y}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)$$

$$-\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{x}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

3488. 引用新的自变量

$$\xi=x-at,\ \eta=x+at$$

解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=-a\frac{\partial u}{\partial \xi}+a\frac{\partial u}{\partial \eta}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-a\frac{\partial u}{\partial \xi}+a\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

于是，由$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0.$$

解之，得$\frac{\partial u}{\partial \xi}=f(\xi)$，从而

$$u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)=\varphi(x-at)+\psi(x+at),$$

其中φ及ψ为任意的函数.

取u及v作新的自变量，变换下列方程：

3489. $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$,

设$u=x+2y+2$及$v=x-y-1$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理即得

$$3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}=0.$$

3490. $(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$，

设$u=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$及$v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial z}{\partial u}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$=-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{1+x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{1+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

3491[+]. $ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (a, b, c为常数)，设$u=\ln x$, $v=\ln y$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理得

$$a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\right)+2b\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0.$$

3492. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设$u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\frac{y}{x^2+y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \\
&+ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \\
&+ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.
\end{aligned}
\right.
\qquad \text{公式11}
$$

本题中，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

注意到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

则由公式11，即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0.$$

由于$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\neq 0$，故得变换后的方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

3493. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2 z=0$，设$x=e^u\cos v, y=e^u\sin v$.

解 由于$x=e^u\cos v, y=e^u\sin v$，故有

$x^2+y^2=e^{2u}$，$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，

$\operatorname{tg} v=\frac{y}{x}$，$v=Arc\operatorname{tg}\frac{y}{x}$ （v的多值性不影响求导所得的结果）．于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由 3492 题得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2 z=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+m^2 z$$

$$=\left[\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+m^2 z$$

$$=e^{-2u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+m^2 z=0,$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+m^2 e^{2u} z=0.$$

3494. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ $(y>0)$，设$u=x-2\sqrt{y}$及 $v=x+2\sqrt{y}$。

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=1, \frac{\partial v}{\partial x}=1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{y}}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}.$$

由公式11得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$-\frac{2}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0.$$

3495. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设$u=xy$，$v=\frac{x}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=y$，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x$，

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}.$$

由公式11得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

$$+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

3496. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，

设$u=x+y$，$v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2}{x^3}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x^2y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，得

$$\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

注意到$v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{u}{xy}$，即$xy=\frac{u}{v}$，于 是

就有

$$\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2}=\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}(x-y)^2$$

$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2[(x+y)^2-4xy]$$

$$=v^2\left(u^2-4\frac{u}{v}\right)=uv(uv-4).$$

从而得变换后的方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{2}{u(4-uv)}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

3497. $xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}$ $=0$，设$u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$及$v=xy$。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=x\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+(x^2+y^2)$$

$$\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，得

$$[(x^2+y^2)^2-4x^2y^2]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=4xy\frac{\partial z}{\partial u},$$

即

$$(u^2-v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=v\frac{\partial z}{\partial u}.$$

3498. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\sin y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin^2 y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,

设$u=x\operatorname{tg}\frac{y}{2}$, $v=x$。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{tg}\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\operatorname{tg}\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x^2}{4}\sec^4\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$+\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.$$

代入原方程，得

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(x\sin y\sec^2\frac{y}{2}-\frac{x}{2}\sin^2 y\sec^2\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)$$

$$\cdot\frac{\partial z}{\partial u}=\left(2x\operatorname{tg}\frac{y}{2}-2x\operatorname{tg}\frac{y}{2}\sin^2\frac{y}{2}\right)\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$=2x\ \mathrm{tg}\frac{y}{2}\cos^2\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x\ \mathrm{tg}\frac{y}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{y}{2}}\frac{\partial z}{\partial u},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

3499. $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$（$x>0$，$y>0$），设$x=(u+v)^2$及$y=(u-v)^2$.

解 由$x=(u+v)^2$及$y=(u-v)^2$分别对x及对y求偏导函数，得

$$\begin{cases}1=2(u+v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\\0=2(u-v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\right);\end{cases}$$

$$\begin{cases}0=2(u+v)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),\\1=2(u-v)\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\right).\end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{4(u+v)},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{4(u-v)}.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{4(u+v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{4(u-v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{4(u+v)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$+\frac{1}{4(u+v)}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=-\frac{1}{8(u+v)^3}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{16(u+v)^3}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

同法可求得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{8(u-v)^3}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{16(u-v)^2}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

代入原方程，得

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{8(u+v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$+\frac{1}{16}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

$$+\frac{1}{8(u-v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$-\frac{1}{16}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{4v}{u^2-v^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{4u}{u^2-v^2}\frac{\partial z}{\partial v}+4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)=0\ ,$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{u^2-v^2}\left(v\frac{\partial z}{\partial u}-u\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0\ .$$

3500. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$，设$u=x$，$v=y+z$。

解 由$u=x$，$v=y+z$得

$du=dx$，$dv=dy+dz$，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{\partial z}{\partial v}(dy+dz).$$

于是，

$$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz=\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{1-\frac{\partial z}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}.$$

$$1+\frac{\partial z}{\partial y}=1+\frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}=\frac{1}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}. \qquad (1)$$

又

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^3}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial z}{\partial u}\right].\quad(2)$$

将（1）式和（2）式代入原方程，去分母即得

$$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=1.$$

3501. 利用线性变换

$$\xi=x+\lambda_1 y,\quad \eta=x+\lambda_2 y$$

变换方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad(1)$$

（其中 A，B 和 C 为常数及 $C\neq 0$，$AC-B^2<0$）为下面的形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

求满足方程（1）的函数的普遍形状.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\lambda_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial\eta}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\lambda_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

将上述结果代入原方程，得

$$(A+2B\lambda_1+C\lambda_1^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2[A+B(\lambda_1+\lambda_2)$$

$$+C\lambda_1\lambda_2]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+(A+2B\lambda_2+C\lambda_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0.$$

当 $A+2B\lambda_1+C\lambda_1^2=0$ 及 $A+2B\lambda_2+C\lambda_2^2=0$. 即 λ_1 与 λ_2 为方程

$$A+2B\lambda+C\lambda^2=0$$

的根时（注意，由假定 $C\neq 0$，$AC-B^2<0$，故此方程恰有两个相异的实根），原方程变换为

$$[A+B(\lambda_1+\lambda_2)+C\lambda_1\lambda_2]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

由根与系数的关系得：$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{2B}{C}$，$\lambda_1\lambda_2=\frac{A}{C}$.

于是，

$$A+B(\lambda_1+\lambda_2)+C\lambda_1\lambda_2=\frac{2(AC-B^2)}{C}\neq 0.$$

从而必有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

此时，$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0$，故$\frac{\partial u}{\partial\xi}=f(\xi)$且

$$u=\int f(\xi)d\xi+\psi(\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$$

$$=\varphi(x+\lambda_1 y)+\psi(x+\lambda_2 y).$$

3502. 证明拉普拉斯方程

$$\Delta z\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

在满足条件$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u}$

的非退化的变数代换

$$x=\varphi(u,\ v),\quad y=\psi(u,\ v)$$

下形式不变.

证
$$\begin{cases} dx=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}du+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}dv, \\ dy=\dfrac{\partial\psi}{\partial u}du+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}dv=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}du+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}dv. \end{cases}$$

令$I=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2$. 由于变换是非退化的，故知

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2=I\neq 0\ .$$

由上述方程组解得

$$du=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}dx-\frac{\partial\varphi}{\partial v}dy\right),$$

$$dv=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial u}dy\right).$$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由3492题的证明及公式11，并考虑到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{I^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right]=\frac{1}{I},$$

即得

$$\Delta z\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

$$=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0\ ,$$

或

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

即形式是不变的.

3503. 假定 $u=f(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，改变方程

(a) $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$；　(б) $\Delta(\Delta u)=0$.

解 (a) $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{r}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(r)\frac{y}{r}$.

于是，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[f'(r)\frac{x}{r}\right]=\frac{f'(r)}{r}$$

$$+\frac{x^2}{r^2}f''(r)+xf'(r)\cdot\left(-\frac{x}{r^3}\right)$$

$$=\frac{x^2}{r^2}f''(r)+\frac{y^2}{r^3}f'(r).$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}f''(r)+\frac{x^2}{r^3}f'(r).$$

于是，

$$\Delta u=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=0,$$

也可写成 $\Delta u=\frac{1}{r}\frac{d}{\partial r}\left(r\frac{du}{dr}\right)=0$.

(6) $\Delta(\Delta u)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}(\Delta u)\right]$

$$=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d^3u}{dr^3}+\frac{d^2u}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right]$$

$$=\frac{d^4u}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{du}{dr}=0.$$

3504. 若令

$$w=f(u),$$

其中 $$u=(x-x_0)(y-y_0),$$

方程 $$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+cw=0$$

变成怎样的形状?

解 $\frac{\partial w}{\partial x}=(y-y_0)\frac{dw}{du}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{dw}{du}+u\frac{d^2w}{du^2}$. 于是，方程$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+cw=0$变换成

$$u\frac{d^2w}{du^2}+\frac{dw}{du}+cw=0.$$

3505. 假定

$$x+y=X,\ y=XY,$$

变换式子 $A=x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}$.

解 $X=x+y$，$Y=\frac{y}{X}=\frac{y}{x+y}=1-\frac{x}{x+y}$. 于是，$\frac{\partial X}{\partial x}=1$，$\frac{\partial X}{\partial y}=1$，$\frac{\partial Y}{\partial x}=-\frac{y}{(x+y)^2}$，

$$\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{x}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial X}-\frac{y}{(x+y)^2}\frac{\partial u}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}-\frac{2y}{(x+y)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}$$

$$+\frac{y^2}{(x+y)^4}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}+\frac{2y}{(x+y)^3}\frac{\partial u}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{x-y}{(x+y)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}$$

$$-\frac{xy}{(x+y)^4}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}-\frac{x-y}{(x+y)^3}\frac{\partial u}{\partial Y}.$$

代入所给式子，得

$$A=X\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}-Y\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial X}.$$

3506. 证明：方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z^2=0$$

在变换 $\quad x=uv$ 及 $y=\frac{1}{v}$

下形状不变.

证 $v=\frac{1}{y}$, $u=\frac{x}{v}=xy$. 于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial z}{\partial u}\right)=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

代入原方程，得

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2xy^3\frac{\partial z}{\partial u}+2x(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial u}-2(y-y^3)$$

$$\cdot\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}+x^2y^2z^2=0,$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2uv^2\frac{\partial z}{\partial u}+2(v-v^3)\frac{\partial z}{\partial v}+u^2v^2z^2=0,$$

故其形状不变.

3507. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

在变换 $u=x+z$ 及 $v=y+z$

下形状不变。

证 将 u, v 作中间变量，x, y 作自变量。微分得

$$du=dx+dz,\ dv=dy+dz,\ d^2u=d^2v=d^2z.$$

于是，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy.$$

令 $A=1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}$，则有 $dz=\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial v}dy$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

从而有

$$du=dx+dz=\frac{1-\frac{\partial z}{\partial v}}{A}dx+\frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{A}dy,$$

$$dv=dy+dz=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{A}dx+\frac{1-\frac{\partial z}{\partial u}}{A}dy,$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}d^2u+\frac{\partial z}{\partial v}d^2v.$$

上面最后一个等式即

$$Ad^2z=\frac{1}{A^2}\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy\right]^2\right.$$

$$+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy\right]$$

$$\cdot\left[\frac{\partial z}{\partial u}dx+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)dy\right]+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left[\frac{\partial z}{\partial u}dx\right.$$

$$\left.\left.+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)dy\right]^2\right\}.$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{A^3}\left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{A^3}\left[\frac{\partial z}{\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right.$$

$$+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

$$\left.+\frac{\partial z}{\partial u}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{A^3}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial z}{\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right].$$

代入原方程，化简整理即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

故其形状不变。

3508. 假定

$$x=\eta\zeta,\quad y=\xi\zeta,\quad z=\xi\eta,$$

变换方程 $xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+yz\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}+xz\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}=0.$

解 由于

$$\begin{cases} 1=\zeta\frac{\partial \eta}{\partial x}+\eta\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ 0=\zeta\frac{\partial \xi}{\partial x}+\xi\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ 0=\eta\frac{\partial \xi}{\partial x}+\xi\frac{\partial \eta}{\partial x}, \end{cases}$$

故有

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=-\frac{\xi}{2\eta\zeta},\quad \frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{2\zeta},\quad \frac{\partial \zeta}{\partial x}=\frac{1}{2\eta}.$$

同法求得

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{1}{2\zeta},\quad \frac{\partial \eta}{\partial y}=-\frac{\eta}{2\xi\zeta},\quad \frac{\partial \zeta}{\partial y}=\frac{1}{2\xi}.$$

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$=-\frac{\xi}{2\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{2\zeta}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial\zeta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\xi}{2\eta\zeta}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi}$$

$$-\frac{\xi}{2\eta\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\zeta}\right)\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

$$+\frac{1}{2\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\eta}\right)\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)$$

$$=-\frac{1}{4\eta\zeta^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\xi}{4\eta\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$$

$$-\frac{1}{4\xi\zeta^2}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\eta}{4\xi\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$

$$+\frac{1}{4\xi\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{1}{4\xi\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{2\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}. \qquad (1)$$

同法可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{1}{4\xi\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{4\eta\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$$

$$-\frac{1}{4\xi^2\zeta}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\eta}{4\xi^2\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$

$$-\frac{1}{4\xi^2\eta}\frac{\partial u}{\partial\zeta}-\frac{\zeta}{4\xi^2\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{2\xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\zeta}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=-\frac{1}{4\eta^2\zeta}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\xi}{4\eta^2\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$$

$$+\frac{1}{4\xi\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{4\xi\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$-\frac{1}{4\eta^2\xi}\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\frac{\zeta}{4\eta^2\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\frac{1}{2\eta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \xi}. \quad (3)$$

将(1)，(2)，(3)三式连同 x，y，z 一起代入原方程，化简整理得

$$\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}+\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$$

$$=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\eta\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \zeta}+\zeta\xi\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \xi}\right),$$

即

$$\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$

$$=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\eta\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \zeta}+\zeta\xi\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \xi}\right).$$

3509. 假定

$$y_1=x_2+x_3-x_1,\quad y_2=x_1+x_3-x_2,$$
$$y_3=x_1+x_2-x_3,$$

变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_3}=0.$$

解 不难看出

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}=\left(\frac{\partial}{\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3}=\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}-\frac{\partial}{\partial y_3}\right)z.$$

把上述结果代入所给方程的左端，即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_3}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_3}+\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(2\frac{\partial z}{\partial y_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(2\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(2\frac{\partial z}{\partial y_2}\right)$$

$$=2\Big[\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{\partial z}{\partial y_3}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{\partial z}{\partial y_1}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}-\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{\partial z}{\partial y_2}\Big]$$

$$=2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}\right).$$

从而原方程变换为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}=0.$$

3510. 假定

$$\xi=\frac{y}{x},\eta=\frac{z}{x},\ \zeta=y-z,$$

变换方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$+2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0.$$

解 定义算子 A:

$$Au=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)u,$$

则有

$$A^2u=A(Au)=x\frac{\partial}{\partial x}(Au)+y\frac{\partial}{\partial y}(Au)$$

$$+z\frac{\partial}{\partial z}(Au)$$

$$=x\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+z\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

$$+y\left(x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2}{\partial y^2}+z\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\right)u$$

$$+z\left(x\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+y\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+z\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\right)u,$$

$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u+Au.$$

于是，原方程可改写成

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u=0\quad \text{或}A^2u-Au=0.$$

但是，

$$Au=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$=x\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{z}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+y\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$

$$+z\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$

$$=(y-z)\frac{\partial u}{\partial \zeta}=\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$A^2u=A(Au)=\left(\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)Au=\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$

$$=\zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

从而 $\Delta^2 u - \Delta u = \zeta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$. 由于$\zeta \neq 0$，故原方程变换为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0 .$$

3511. 假定

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$$

变换式子 $\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$

及 $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

为球坐标所表的式子。

解 先作变换

$$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = z,$$

它相当于对 x，y 坐标作一次极坐标变换.

利用 3483 题及 3484 题的结果，对新变元 R，φ，z有

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

再作变换

$$R=r\sin\theta,\ \varphi=\varphi,\ z=r\cos\theta.$$

它相当于对 R，z 坐标又作一次极坐标变换，其中 R 相当于公式 9 中的 y，θ 相当于公式 9 中的φ. 于是，

$$\frac{\partial u}{\partial R}=\frac{R}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{z}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

再利用 3483 题及 3484 题的结果，得

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2,$$

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

$$+\frac{1}{r^2\operatorname{tg}\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\Big].$$

注意到两次变换的乘积就是所给的变换，因此，最后得到的$\Delta_1 u$及$\Delta_2 u$的结果即为所求。

3512. 在方程

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

中引入新函数 w，假定 $w=z^2$。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dw}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial y}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{2z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{4z^3}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{4z^3}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

代入原方程，化简整理得

$$w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

即形式是不变的。

取 u 和 v 为新的自变量及 $w=w(u, v)$ 为新函数，变

换下列方程：

3513. $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}$，设$u=\frac{x}{y}$，$v=x$，$w=xz-y$.

解 从3513题到3522题均属作变换

$u=u(x,\ y)$，$v=v(x,\ y)$，$w=w(x,\ y,\ z)$

的类型. 我们来导出一般公式，顺便指出一般方法.

将u，v看作中间变量，x，y看作自变量，则有

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,\quad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy,$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^2v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dy^2.$$

$$d^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}dz^2$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}dydz$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}dzdx+\frac{\partial w}{\partial z}d^2z.$$

将dw，du及dv代入全微分式

$$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv,$$

化简整理得

$$\frac{\partial w}{\partial z}dz=\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx$$

$$+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy.$$

于是，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right),\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial w}{\partial y}\right),\end{cases} \qquad \text{公式12}$$

其中$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$是原方程中旧变元间的偏导函数，而$\frac{\partial w}{\partial u}$及$\frac{\partial w}{\partial v}$是变换后新变元间的偏导函数，其它均为由已给变换导出的已知关系式.

把上面求得的d^2w，du，dv，d^2u，d^2v代入表示新变元关系的二阶全微分式：

$$d^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2$$

$$+\frac{\partial w}{\partial u}d^2u+\frac{\partial w}{\partial v}d^2v,$$

再把式中的dz表成已求得的$\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$，按$dx^2$，$dxdy$及$dy^2$合并同类项，最后把所得的结果与表示旧变元关系的全微分式：

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

相比较，即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\left.-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right.$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

$$\left.-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right.$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

$$+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\Bigg]. \qquad \text{公式13}$$

公式13太复杂，一般不直接应用．本题用求偏导数法较方便．由于

$$\frac{\partial w}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial y}-1$$

及 $$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u},$$

故得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}.$$

于是，

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}\left(y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\right]$$

$$=y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{x}\right)-y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{2}{x}-y^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$=\frac{2}{x}+\frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{2}{x}.$$

由于$\frac{x}{y^3}\neq 0$，故原方程变换为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0.$$

3514. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设$u=x+y$，$v=\frac{y}{x}$，$w=\frac{z}{x}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=1$，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}$，

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{z}{x^2},\ \frac{\partial w}{\partial y}=0,\ \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{x}.$$

代入公式12，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x^2}\right)$$

$$=x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

令$R=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x}-\frac{\partial w}{\partial v}=w-(1+v)$

$\cdot\frac{\partial w}{\partial v}$. 于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial R}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial R}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial v}\left[w-(1+v)\frac{\partial w}{\partial v}\right]\left(-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial v}-(1+v)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right]\left[-\frac{1}{x}(1+v)\right]$$

$$=\frac{1}{x}(1+v)^2\frac{\partial^2 w}{dv^2}=0,$$

由于 $x\neq 0$，$1+v\neq 0$，故原方程变为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

3515. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设$u=x+y, v=x-y$，$w=xy-z$。

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=1$，$\frac{\partial v}{\partial y}=-1$，

$$\frac{\partial w}{\partial x}=y, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=x, \quad \frac{\partial w}{\partial z}=-1.$$

代入公式12，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

令$R=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=x+y-2\frac{\partial w}{\partial u}=u-2\frac{\partial w}{\partial u}$。于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial R}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=2\frac{\partial}{\partial u}\left(u-2\frac{\partial w}{\partial u}\right)=2-4\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0,$$

原方程变换为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}.$$

3516. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z$，设$u=\frac{x+y}{2}$， $v=\frac{x-y}{2}$，$w=ze^y$。

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}=-\frac{\partial v}{\partial y}$,

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0，\frac{\partial w}{\partial y}=ze^y,\ \frac{\partial w}{\partial z}=e^y.$$

代入公式12，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}e^{-y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}e^{-y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-z.$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+z\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-y}\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$=e^{-y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)=e^{-y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{-z}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)=z.$$

原方程变换为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=2ze^{z}=2w.$$

3517. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设$u=x$，$v=x+y$，$w=x+y+z$。

解 由公式12不难求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}-1，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial v}-1.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}.$$

同3514题的方法可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2},$$

$$\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-1\right)$$

$$=\left(\frac{v}{u}-1\right)\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$=\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

将上述结果代入原方程，即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

3518. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$，设

$x=\sin u$，$y=\sin v$，$z=e^w$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dw}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dx}=\frac{e^w}{\cos u}\frac{\partial w}{\partial u}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^w}{\cos v}\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^w}{\cos u}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e^w}{\cos u}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{\cos u}\left[\frac{e^w}{\cos u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\frac{e^w}{\cos u}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{e^w\sin u}{\cos^2 u}\frac{\partial w}{\partial u}\right]$$

$$=\frac{e^w}{\cos^2 u}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\operatorname{tg}u\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{e^w}{\cos^2 v}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\operatorname{tg}v\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right].$$

将上述结果代入原方程，并注意到

$$1-x^2=\cos^2 u,\quad 1-y^2=\cos^2 v,$$

化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0.$$

3519. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{4}z=0$ $(|x|<1)$，设 $u=\frac{1}{2}(y+\arccos x)$，$v=\frac{1}{2}(y-\arccos x)$，$w=z\sqrt[4]{1-x^2}$。

解 由公式12不难求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{xz}{2(1-x^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

于是，

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{xz}{2}\right]$$

$$=-\frac{x}{4(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{z}{2}+\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{z}{2}+\frac{x^2 z}{4(1-x^2)}+\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$-\frac{\partial w}{\partial u}\Big)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\Big)\frac{\partial v}{\partial x}\Big]$$

$$=\frac{z}{4}+\frac{z}{4(1-x^2)}+\frac{1}{4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\cdot\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)=\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\Big)$$

$$\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\Big)\frac{\partial v}{\partial y}\Big]$$

$$=\frac{1}{4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big).$$

将上述结果代入原方程，并注意到

$\arccos x=u-v$， $x=\cos(u-v)$，

$1-x^2=\sin^2(u-v)$，

化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{w}{4\sin^2(u-v)}.$$

3520. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}}{x^2-y^2}-\frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^2}$ ($|x|$

$>|y|$)，设 $u=x+y, v=x-y,\ w=\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

解 原方程可改写为

$$\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{2x}{(x^2-y^2)^2}$$

$$\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{2y}{(x^2-y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^3}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=-\frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^3}. \tag{1}$$

由公式12不难求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{xz}{x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-\frac{yz}{x^2-y^2}.$$

于是，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{xz}{(x^2-y^2)^2}\right]$$

$$=-\frac{x}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{x}{(x^2-y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{4x^2z}{(x^2-y^2)^3}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{3x^2z}{(x^2-y^2)^3}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\cdot\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{3x^2z}{(x^2-y^2)^3}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

同法可求得

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-\frac{yz}{(x^2-y^2)^2}\right]$$

$$=-\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{3y^2z}{(x^2-y^2)^3}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

把上述结果代入方程(1)，化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

3521. 证明：任何方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0$$

(a,b,c为常数) 用代换

$$z=ue^{\alpha x+\beta y}$$

〔其中 α 与 β 为常量，$u=u(x, y)$〕可以化为下面的形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c_1 u=0 \quad (c_1=\text{常数}).$$

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\alpha x+\beta y}\left(\alpha u+\frac{\partial u}{\partial x}\right)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\alpha x+\beta y}\left(\beta u+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{\alpha x+\beta y}\left(\alpha\beta u+\beta\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right).$$

将上述结果代入所给方程，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(\beta+a)\frac{\partial u}{\partial x}+(\alpha+b)\frac{\partial u}{\partial y}+(\alpha\beta+a\alpha$$

$$+b\beta+c)u=0.$$

按题意，需 $\beta+a=0$及$\alpha+b=0$，即$\beta=-a$，$\alpha=-b$，这是可能的．事实上，只需取代换

$$z=ue^{-(bx+ay)},$$

原方程即变换为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c_1 u=0 \quad (c_1\text{为常数}).$$

3522. 证明：方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

对于变量代换

$$x'=\frac{x}{y},\quad y'=-\frac{1}{y},\quad u=\frac{u'}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

（u'为变量x'与y'的函数）其形状不变。

证 $dx'=\frac{dx}{y}-\frac{x}{y^2}dy$，$dy'=\frac{1}{y^2}dy$，

$$\ln u'=\ln u+\frac{1}{2}\ln y+\frac{x^2}{4y},$$

$$du'=\frac{u'}{u}du+\frac{u'}{2y}dy+\frac{xu'}{2y}dx-\frac{x^2u'}{4y^2}dy.$$

把上面三个微分式代入

$$du'=\frac{\partial u'}{\partial x'}dx'+\frac{\partial u'}{\partial y'}dy'$$

得

$$\frac{u'}{u}du+\frac{u'}{2y}dy+\frac{xu'}{2y}dx-\frac{x^2u'}{4y^2}dy$$

$$=\frac{\partial u'}{\partial x'}\left(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy\right)+\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{dy}{y^2},$$

整理得

$$du=\left(\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{xu}{2y}\right)dx+\left(\frac{u}{y^2u'}\cdot\frac{\partial u'}{\partial y'}\right.$$

$$-\frac{xu}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{x^2u}{4y^2}-\frac{u}{2y}\Big)dy.$$

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{xu}{2y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial y'}-\frac{xu}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial x'}$$

$$+\frac{x^2u}{4y^2}-\frac{u}{2y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{xu}{2y}\Big)$$

$$=\frac{u}{yu'}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{1}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{yu'^2}$$

$$\cdot\Big(\frac{\partial u'}{\partial x'}\Big)^2\frac{\partial x'}{\partial x}-\frac{u}{2y}-\frac{x}{2y}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$=\frac{u}{y^2u'}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\Big(\frac{1}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{x}{2y}\Big)$$

$$\cdot\Big(\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{xu}{2y}\Big)-\frac{u}{y^2u'^2}\Big(\frac{\partial u'}{\partial x'}\Big)^2-\frac{u}{2y}$$

$$=\frac{u}{y^2u'}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}-\frac{xu}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial x'}$$

$$+\frac{x^2u}{4y^2}-\frac{u}{2y}. \tag{2}$$

将(1)式和(2)式代入原方程，得

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}=\frac{\partial u'}{\partial y'},$$

即方程的形式不变.

3523. 在方程

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$+p(1-p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

(其中 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$，$q=\frac{\partial z}{\partial y}$) 中令$u=x+z$，$v=y+z$，

$w=x+y+z$，假定$w=w(u,\ v)$.

解 本题用全微分法解较好. 由

$dz=pdx+qdy$及$u=x+z, v=y+z, w=x+y+z$

可得

$$du=dx+dz=(1+p)dx+qdy,$$
$$dv=dy+dz=pdx+(1+q)dy,$$
$$d^2u=d^2v=d^2w=d^2z.$$

把上述结果代入新变元的全微分式

$$d^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2$$

$$+\frac{\partial w}{\partial u}d^2u+\frac{\partial w}{\partial v}d^2v,$$

并记 $S=1-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}$，即得

$$Sd^2z=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\Big[(p+1)dx+qdy\Big]^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$$

$$\cdot\Big[(p+1)dx+qdy\Big]\Big[pdx+(q+1)dy\Big]$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big[pdx+(q+1)dy\Big]^2.$$

将上式与

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

比较，可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{S}\Big[(1+p)^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2p(1+p)$$

$$\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+p^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{S}\Big[q(p+1)\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+(1+p+q+2pq)$$

$$\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+p(q+1)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{S}\Big[q^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2q(q+1)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$$

$$+(q+1)^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big].$$

代入原方程，并注意到

$$q(1+q)(1+p)^2-(1+p+q+2pq)q$$

$$\cdot(p+1)+p(1+p)q^2$$

$$=q(1+p)\Big[(1+p)(1+q)-(1+p$$

$$+q+2pq)+pq\Big]=0,$$

$$p^2q(1+q)-(1+p+q+2pq)p(q+1)$$
$$+p(1+p)(q+1)^2=0$$

及

$$2p(1+p)q(1+q)-(1+p+q+2pq)^2$$
$$+2q(q+1)p(1+p)=-(1+p+q)^2,$$

原方程变换为

$$-\frac{(1+p+q)^2}{S}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=0 \text{ 或 } \frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=0 .$$

3524. 在方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$
$$+\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

中令 $x=e^{\xi}, y=e^{\eta}, z=e^{\zeta}, u=e^{w}$，其中$w=w(\xi,\eta,\zeta)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dw}\cdot\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{e^w}{x}\frac{\partial w}{\partial \xi}$,

$$x\frac{\partial u}{\partial x}=e^w\frac{\partial w}{\partial \xi}, \tag{1}$$

$$y\frac{\partial u}{\partial y}=e^w\frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad z\frac{\partial u}{\partial z}=e^w\frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

(1)式两端对 x 求偏导函数，得

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=e^w\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\frac{d\xi}{dx}+e^w\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\frac{d\xi}{dx}.$$

两端同乘 x，整理得

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^w\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2+e^w\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}-e^w\frac{\partial w}{\partial \xi}. \qquad (2)$$

同法可得

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^w\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2+e^w\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}-e^w\frac{\partial w}{\partial \eta}, \qquad (3)$$

$$z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=e^w\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2+e^w\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}-e^w\frac{\partial w}{\partial \zeta}. \qquad (4)$$

将(2)，(3)，(4)三式代入原方程，化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}=(e^w-1)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2\right]+\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

3525. 证明：方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

的形状与变量 x，y 和 z 所分别担任的角色无关。

证 令 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$，$q=\frac{\partial z}{\partial y}$，则 $dz=pdx+qdy$. 若以x作为新函数，则有

$$d^2x=\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}dydz+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}dz^2$$

$$+\frac{\partial x}{\partial y}d^2y+\frac{\partial x}{\partial z}d^2z.$$

今以作为旧变元的关系：

$$d^2x = 0\,,\quad d^2y = 0\,,\quad dz = p\,dx + q\,dy$$

代入上式，可得

$$d^2z = -\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial z}}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}dy^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}dy\right.$$

$$\left.\cdot(p\,dx + q\,dy) + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(p\,dx + q\,dy)^2\right].$$

于是，

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2} = -p\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -p\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z} + pq\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -p\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + 2q\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z} + q^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right). \tag{3}$$

代入原方程，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2 = p^2\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + 2q\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z} + q^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)$$

$$-p^2\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z} + pq\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)^2$$

$$= p^4\left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2\right] = 0\,,$$

即

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2=0.$$

类似地，若以 y 作为函数，则也有

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial z}\right)^2=0,$$

即方程的形状与变量 x，y 和 z 所分别担任的角色无关。

3526. 取 x 作为变量 y 和 z 的函数，解方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解 将3525题中的(1)，(2)，(3)三式及 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$，$q=\frac{\partial z}{\partial y}$代入，得

$$q^2\left(-p^3\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)+2pq\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+p^2q\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)$$

$$-p^2\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+2pq\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+pq^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)$$

$$=-p^3\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0,$$

即 $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$ 或 $p=0$．由

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$$

解之，得原方程的解为

$$x=\varphi(z)y+\psi(z),$$

其中 φ，ψ 为任意函数；由 $p=0$ 解之，得 $z=f(y)$ （f 为任意函数），它也是原方程的解。

3527$^+$. 运用勒襄德变换

$$X=\frac{\partial z}{\partial x},\ Y=\frac{\partial z}{\partial y},\ Z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z,$$

其中$Z=Z(X,\ Y)$，变换方程

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$+C\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解 $dZ=d\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z\right)$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy-dz+xdX+ydY$$

$$=xdX+ydY.$$

于是，

$$\frac{\partial Z}{\partial X}=x,\ \frac{\partial Z}{\partial Y}=y.$$

微分上式，得

$$\begin{cases} dx=\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2}dX+\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}dY, \\ dy=\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}dX+\dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}dY. \end{cases} \tag{1}$$

又由$X=\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$Y=\dfrac{\partial z}{\partial y}$微分得

$$\begin{cases} dX=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dy, \\ dY=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy. \end{cases} \tag{2}$$

由（1）式与（2）式，得

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

由此可知

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 1,$$

因此

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

于是，由（1）式解之，得

$$\begin{cases} dX = I^{-1}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}dx - \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}dy\right), \\ dY = I^{-1}\left(-\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}dx + \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}dy\right). \end{cases} \tag{3}$$

比较（2）式与（3）式，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = I^{-1}\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -I^{-1}\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = I^{-1}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}.$$

代入原方程，即得

$$A(X, Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - 2B(X, Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$$

$$+ C(X, Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0.$$

§5. 几何上的应用

1° **切线和法平面** 在曲线

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)$$

上的一点 $M(x, y, z)$ 的切线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

在此点的法平面方程为

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0.$$

2° **切平面和法线** 曲面 $z=f(x, y)$ 上点 $M(x, y, z)$ 处的切平面方程为

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y).$$

在 M 点处的法线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-1}.$$

若曲面的方程给成隐函数的形状 $F(x, y, z)=0$，则切平面方程为：

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0,$$

法线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

3° **平面曲线族的包线** 含一个参数的曲线族 $f(x, y, \alpha)=0$ （α为参数）的包线满足方程组：

$$f(x, y, \alpha)=0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha)=0.$$

4° **曲面族的包面** 含一个参数的曲面族 $F(x, y, z, \alpha)=0$ 的包面满足方程组：

$$F(x, y, z, \alpha)=0, \quad F'_\alpha(x, y, z, \alpha)=0.$$

在含两个参数的曲面族 $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta)=0$ 的情形，其包面满足下面的方程组：

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta)=0, \quad \Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta)=0,$$
$$\Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta)=0.$$

对下列曲线写出在已知点的切线和法平面方程：

3528. $x=a\cos\alpha\cos t$, $y=a\sin\alpha\cos t$, $z=a\sin t$；在点 $t=t_0$。

解 曲线

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

在点 $t=t_0$ 的切向量为

$$\vec{v}(t_0)=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}.$$

本题中，当 $t=t_0$ 时曲线上点的坐标及曲线在该点的切向量分别为

$$x_0=x(t_0)=a\cos\alpha\cos t_0,$$
$$y_0=y(t_0)=a\sin\alpha\cos t_0,$$
$$z_0=z(t_0)=a\sin t_0,$$

$$\vec{v}(t_0)=\{-a\cos\alpha\sin t_0,\ -a\sin\alpha\sin t_0,\ a\cos t_0\}.$$

于是，切线方程为

$$\frac{x-x_0}{-a\cos\alpha\sin t_0}=\frac{y-y_0}{-a\sin\alpha\sin t_0}=\frac{z-z_0}{a\cos t_0},$$

即

$$\frac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0}=\frac{y-y_0}{-\sin\alpha\sin t_0}=\frac{z-z_0}{\cos t_0};$$

法平面方程为

$$(-a\cos\alpha\sin t_0)(x-x_0)+(-a\sin\alpha\sin t_0)\cdot(y-y_0)+(a\cos t_0)(z-z_0)=0,$$

以 x_0，y_0，z_0 的值代入上式，化简整理得

$$x\cos\alpha\sin t_0+y\sin\alpha\sin t_0-z\cos t_0=0,$$

即法平面过原点.

3529. $x=a\sin^2 t$，$y=b\sin t\cos t$，$z=c\cos^2 t$；在点 $t=\frac{\pi}{4}$.

解 $x_0=a\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{a}{2}$，$y_0=\frac{b}{2}$，$z_0=\frac{c}{2}$；

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\{a,\ 0,\ -c\}.$$

于是，切线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-\frac{a}{2}}{a}=\dfrac{z-\frac{c}{2}}{-c},\\ y=\dfrac{b}{2};\end{cases} \text{或} \begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1,\\ y=\dfrac{b}{2};\end{cases}$$

法平面方程为

$$a\left(x-\frac{a}{2}\right)+(-c)\left(z-\frac{c}{2}\right)=0,$$

即

$$ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2).$$

3530. $y=x$, $z=x^2$; 在点$M(1, 1, 1)$.

解 设 $x=t$, 则 $y=t$, $z=t^2$. 于是,

$\vec{v}(1)=\{1, 1, 2\}$,

切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2};$$

法平面方程为

$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$或$x+y+2z=4$.

3531. $x^2+z^2=10$, $y^2+z^2=10$;在点$M(1, 1, 3)$.

解 当曲线以两个曲面方程

$F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$

交线形式给出时, 可先求出两曲面在交点处的法向量:

$\vec{n}_1=\{F'_{1x}, F'_{1y}, F'_{1z}\}$, $\vec{n}_2=\{F'_{2x}, F'_{2y}, F'_{2z}\}$,

则曲线在该点的切向量为

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\left\{\begin{vmatrix}F'_{1y}F'_{1z}\\F'_{2y}F'_{2z}\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}F'_{1z}F'_{1x}\\F'_{2z}F'_{2x}\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}F'_{1x}F'_{1y}\\F'_{2x}F'_{2y}\end{vmatrix}\right\}.$$

本题中,

$\vec{n}_1=\{2, 0, 6\}$, $\vec{n}_2=\{0, 2, 6\}$,

$\vec{v}=\{1, 0, 3\}\times\{0, 1, 3\}=\{-3, -3, 1\}$.

于是，切线方程为

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{1}$$

或 $$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1};$$

法平面方程为

$$-3(x-1)-3(y-1)+(z-3)=0,$$

即

$$3x+3y-z=3.$$

3532. $x^2+y^2+z^2=6$, $x+y+z=0$；在点$M(1, -2, 1)$.

解 $F_1=x^2+y^2+z^2-6=0$, $F_2=x+y+z=0$.

$\vec{n}_1=2\{1, -2, 1\}$, $n_2=\{1, 1, 1\}$,

$\vec{v}=\{1, -2, 1\}\times\{1, 1, 1\}$

$=-3\{1, 0, -1\}$.

于是，切线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1},\\ y=-2;\end{cases} \text{或} \begin{cases}x+z=2,\\ y+2=0;\end{cases}$$

法平面方程为

$$(x-1)-(z-1)=0 \text{ 或 } x-z=0.$$

3533. 在曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上求出一点，此点的切线是平行于平面 $x+2y+z=4$ 的.

解 $\vec{v}=\{1, 2t, 3t^2\}$，平面法向量$\vec{n}=\{1, 2, 1\}$.

按题设，应有

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=1+4t+3t^2=0.$$

解之，得 $t=-1$ 或 $t=-\frac{1}{3}$. 于是，所求的点为 $M_1(-1, 1, -1)$，$M_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$.

3534. 证明：螺旋线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ 的切线与 Oz 轴形成定角。

证 $\frac{dx}{dt}=-a\sin t$, $\frac{dy}{dt}=a\cos t$, $\frac{dz}{dt}=b$. 于是，切线与 Oz 轴形成之角 γ 的余弦

$$\cos\gamma=\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

$$=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

由于 $\cos\gamma$ 为常数，故知切线与 Oz 轴形成定角。

3535. 证明：曲线

$$x=ae^t\cos t,\quad y=ae^t\sin t,\quad z=ae^t$$

与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同.

证 圆锥 $x^2+y^2=z^2$ 的顶点在原点，过圆锥上任一点 $P(x, y, z)$ 的母线也过原点. 因此，母线的方向向量为 $\vec{v}_1=\{x, y, z\}$.

曲线在点 P 的切向量为 $\vec{v}_2=\{x', y', z'\}=\{ae^t(\cos t-\sin t), ae^t(\sin t+\cos t), ae^t\}=\{x-y, x+y,$

$z\}$.

注意到 $x^2+y^2=z^2$，即得

$$\cos(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2})=\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$$

$$=\frac{x(x-y)+y(x+y)+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2+z^2}}$$

$$=\frac{2z^2}{\sqrt{2z^2}\sqrt{3z^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}},$$

于是，交角相同。

3536. 证明斜驶线

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=e^{k\varphi}\quad(k=\text{常数})\text{，}$$

(其中φ——地球上点的经度，ψ——地球上点的纬度)与地球的一切子午线相交成定角。

证 取直角坐标系如下：赤道平面为Oxy平面，球心为坐标原点，Ox 轴正向过 0° 子午线，Oz 轴正向过北极，并取$Oxyz$坐标系为右手系。

下面我们先确定斜驶线和子午线在直角坐标系中的方程．为此，假定讨论地球上的点的经度为φ ($0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$)，纬度为$\psi$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则它在上述坐标系下的坐标为

$$\begin{cases}x=R\cos\psi\cos\varphi,\\y=R\cos\psi\sin\varphi,\\z=R\sin\psi,\end{cases}$$

其中 R 为地球半径。

对 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=e^{k\varphi}$ 的两端微分，得

$$\frac{d\psi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)}=ke^{k\varphi}d\varphi=k\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)d\varphi.$$

于是，

$$\frac{d\varphi}{d\psi}=\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)k\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)\right]^{-1}$$

$$=\left[k\sin\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)\right]^{-1}=\frac{1}{k\cos\psi}.$$

今将斜驶线方程看作决定 φ 为 ψ 的隐函数. 因此，对斜驶线来说，在 $(\varphi_0,\ \psi_0)$ 点，有

$$\frac{dx}{d\psi}=-R\sin\psi_0\cos\varphi_0-R\cos\psi_0\sin\varphi_0\frac{d\varphi}{d\psi}$$

$$=-R\left(\sin\psi_0\cos\varphi_0+\frac{\sin\varphi_0}{k}\right).$$

$$\frac{dy}{d\psi}=-R\sin\psi_0\sin\varphi_0+R\cos\psi_0\cos\varphi_0\frac{d\varphi}{d\psi}$$

$$=-R\left(\sin\psi_0\sin\varphi_0-\frac{\cos\varphi_0}{k}\right),$$

$$\frac{dz}{d\psi}=R\cos\psi_0.$$

于是，可取斜驶线切向量

$$\vec{v}_1=\left\{\sin\psi_0\cos\varphi_0+\frac{\sin\varphi_0}{k},\ \sin\psi_0\sin\varphi_0\right.$$

$$-\frac{\cos\varphi_0}{k},\quad -\cos\psi_0\Big\}.$$

当 φ 为常数时即得子午线，故其参数方程为

$$\begin{cases} x=R\cos\psi\cos\varphi_0, \\ y=R\cos\psi\sin\varphi_0, \\ z=R\sin\psi. \end{cases}$$

于是，子午线在点$(\varphi_0,\ \psi_0)$的切向量为

$$\vec{v}_2=\{\sin\psi_0\cos\varphi_0,\ \sin\psi_0\sin\varphi_0,\ -\cos\psi_0\}.$$

从而得

$$\cos(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2})=\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}=\text{常数},$$

即斜驶线与子午线相交成定角.

3537. 已知曲线

$$z=f(x,\ y),\quad \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha},$$

其中 f 为可微分函数. 求曲线上$M_0(x_0,\ y_0)$点的切线与 Oxy 平面所成角的正切.

解 *解法一*

将曲线看作由参数方程

$x=x,\ y=\varphi(x)=y_0+(x-x_0)\operatorname{tg}\alpha,\ z=\psi(x)$
$=f[x,\ \varphi(x)]$给出，则切向量为

$$\vec{v}=\{1,\ \varphi'(x_0),\ \psi'(x_0)\}$$
$$=\{1,\ \operatorname{tg}\alpha,\ f'_x[x_0,\ \varphi(x_0)]$$
$$+f'_y[x_0,\varphi(x_0)]\varphi'(x_0)\}$$

$$=\{1,\ \mathrm{tg}\alpha,\ f'_x(x_0,\ y_0)+\mathrm{tg}\alpha\cdot f'_y(x_0,\ y_0)\}.$$

于是，曲线上M_0点的切线与Oxy平面所成角φ的正切为

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{\psi'(x_0)}{\sqrt{1+\varphi'^2(x_0)}}=\frac{f'_x(x_0,y_0)+\mathrm{tg}\alpha\cdot f'_y(x_0,y_0)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$$

$$=f'_x(x_0,\ y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,\ y_0)\sin\alpha.$$

解法二

将曲线看作两条曲线的交线，则所给曲线在M_0点的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} f'_y(x_0,y_0) & -1 \\ -\dfrac{1}{\sin\alpha} & 0 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} -1 & f'_x(x_0,y_0) \\ 0 & \dfrac{1}{\cos\alpha} \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} f'_x(x_0,y_0) & f'_y(x_0,y_0) \\ \dfrac{1}{\cos\alpha} & -\dfrac{1}{\sin\alpha} \end{vmatrix}},$$

即

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\frac{z-z_0}{f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha},$$

因此，切线与Oxy平面所成角φ的正切为

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}$$

$$=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

3538. 求函数

$$u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

在点 $M(1,\ 2,\ -2)$沿曲线

$$x=t,\ y=2t^2,\ z=-2t^4$$

在此点的切线方向上的导函数.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

在点$M(1,2,-2)$它们的值分别为$\frac{8}{27}$, $-\frac{2}{27}$, $\frac{2}{27}$.

又曲线在该点的切线的方向余弦为$\frac{1}{9}$, $\frac{4}{9}$, $-\frac{8}{9}$.

于是，所求的导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{9}+\left(-\frac{2}{27}\right)\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)=-\frac{16}{243}.$$

写出下列曲面上已知点的切面和法线方程:

3539. $z=x^2+y^2$; 在点$M_0(1,\ 2,\ 5)$.

解 当曲面由方程$F(x,\ y,\ z)=0$给出时，法向量为$\vec{n}=\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}\right\}$; 特别是曲面由显式方程

$z=f(x, y)$给出时，法向量为$\vec{n}=\{f'_x, f'_y, -1\}$.
本题中，$\vec{n}=\{2x, 2y, -1\}_{M_0}=\{2, 4, -1\}$.
于是，切面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0,$$

或

$$2x+4y-z=5;$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}.$$

3540. $x^2+y^2+z^2=169$; 在点$M_0(3, 4, 12)$.

解 设$F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-169=0$，则在点$M_0$处$\vec{n}=\{2x, 2y, 2z\}_{M_0}=\{6, 8, 24\}=2\{3, 4, 12\}$. 于是，切面方程为

$$3(x-3)+4(y-4)+12(z-12)=0$$

或 $$3x+4y+12z=169;$$

法线方程为

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}\text{或}\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}.$$

3541. $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$; 在点$M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

解 $\vec{n}=\left\{\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, -1\right\}_{M_0}=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right\}$. 于是，切面方程为

$$z-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)$$

或 $$z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y);$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}.$$

3542. $ax^2+by^2+cz^2=1$；在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$.

解 $\vec{n}=2\{ax_0, by_0, cz_0\}$. 于是，切面方程为

$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0,$$

注意到$ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=1$，上述方程即化为

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=1;$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}.$$

3543. $z=y+\ln\frac{x}{z}$；在点 $M_0(1, 1, 1)$.

解 $F(x, y, z)=y+\ln x-\ln z-z=0$.

$$\vec{n}=\left\{\frac{1}{x}, 1, -\frac{1}{z}-1\right\}_{M_0}=\{1, 1, -2\}.$$

于是，切面方程为

$$(x-1)+(y-1)-2(z-1)=0 \text{ 或 } x+y-2z=0;$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}.$$

3544. $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$；在点$M_0(2,\ 2,\ 1)$.

解 $F(x,\ y,\ z)=2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}-8$,

$$\vec{n}=\left\{\frac{1}{z}2^{\frac{x}{z}}\ln 2,\ \frac{1}{z}2^{\frac{y}{z}}\ln 2,\left(x\cdot 2^{\frac{x}{z}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+y\cdot 2^{\frac{y}{z}}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\ln 2\right)\right\}_{M_0}$$

$$=4\ln 2\{1,1,-4\}.$$

于是，切面方程为

$$(x-2)+(y-2)-4(z-1)=0\text{ 或 }x+y-4z=0;$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}.$$

3545. $x=a\cos\psi\cos\varphi$, $y=b\cos\psi\sin\varphi$, $z=c\sin\psi$；在点$M_0(\varphi_0,\ \psi_0)$.

解 当曲面由参数方程

$$x=x(u,v),\ y=y(u,\ v),\ z=z(u,v)$$

给出时，曲面上分别令$u=u_0$，$v=v_0$得到的两条曲线的切向量分别为

$$\vec{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u}\right\},$$

$$\vec{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right\},$$

则切面的法向量为

$$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\left\{\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right\}.$$

本题中，

$$\vec{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial\varphi},\ \frac{\partial y}{\partial\varphi},\ \frac{\partial z}{\partial\varphi}\right\}_{M_0}$$

$$=\{-a\cos\psi_0\sin\varphi_0, b\cos\psi_0\cos\varphi_0,\ 0\}$$

$$=\cos\psi_0\{-a\sin\varphi_0,\ b\cos\varphi_0,\ 0\},$$

$$\vec{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial\psi},\ \frac{\partial y}{\partial\psi},\ \frac{\partial z}{\partial\psi}\right\}_{M_0}$$

$$=\{-a\sin\psi_0\cos\varphi_0, -b\sin\psi_0\sin\varphi_0,\ c\cos\psi_0\},$$

$$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2$$

$$=abc\left\{\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a},\ \frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b},\ \frac{\sin\psi_0}{c}\right\}.$$

于是，切面方程为

$$\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}(x-a\cos\psi_0\cos\varphi_0)+\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}$$

$$\cdot(y-b\cos\psi_0\sin\varphi_0)$$

$$+\frac{\sin\psi_0}{c}(z-c\sin\psi_0)=0,$$

即

$$\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0+\frac{y}{b}\cos\psi_0\sin\varphi_0+\frac{z}{c}\sin\psi_0=1;$$

法线方程为

$$\frac{x-a\cos\psi_0\cos\varphi_0}{\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}}=\frac{y-b\cos\psi_0\sin\varphi_0}{\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}}=\frac{z-c\sin\psi_0}{\frac{\sin\psi_0}{c}},$$

即

$$\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0-a}{bc}=\frac{y\sec\psi_0\csc\varphi_0-b}{ac}=\frac{z\csc\psi_0-c}{ab}.$$

3546. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=r\operatorname{ctg}\alpha$；在点$M_0(\varphi_0,r_0)$.

解 $\vec{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial\varphi},\ \frac{\partial y}{\partial\varphi},\ \frac{\partial z}{\partial\varphi}\right\}_{M_0}$

$=r_0\{-\sin\varphi_0,\cos\varphi_0,0\}$,

$\vec{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial r},\ \frac{\partial y}{\partial r},\ \frac{\partial z}{\partial r}\right\}_{M_0}$

$=\{\cos\varphi_0,\ \sin\varphi_0,\ \operatorname{ctg}\alpha\}$,

$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=r_0\{\cos\varphi_0\operatorname{ctg}\alpha,\ \sin\varphi_0\operatorname{ctg}\alpha,\ -1\}$.

于是，切面方程为

$\cos\varphi_0\operatorname{ctg}\alpha(x-r_0\cos\varphi_0)+\sin\varphi_0\operatorname{ctg}\alpha$

$\cdot(y-r_0\sin\varphi_0)-(z-r_0\operatorname{ctg}\alpha)=0$.

即

$x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0-z\operatorname{tg}\alpha=0$;

法线方程为

$$\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{z-r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-1}$$

或

$$\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=\frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}=\frac{z-r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}.$$

3547. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$; 在点$M_0(u_0,v_0)$.

解 $\vec{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u}\right\}_{M_0}=\{\cos v_0,\sin v_0,0\}$,

$$\vec{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right\}_{M_0}$$

$$=\{-u_0\sin v_0,\ u_0\cos v_0,\ a\},$$

$$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\{a\sin v_0,\ -a\cos v_0,\ u_0\}.$$

于是，切面方程为

$$a\sin v_0(x-u_0\cos v_0)-a\cos v_0(y-u_0\sin v_0)$$
$$+u_0(z-av_0)=0,$$

即

$$ax\sin v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0;$$

法线方程为

$$\frac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}.$$

3548. 求曲面

$$x=u+v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3+v^3$$

的切平面当切点 $M(u,v)(u\neq v)$ 无限接近于曲面的边界线 $u=v$ 上的点 $M_0(u_0,v_0)$时的极限位置.

解 $\vec{n}(u,v)=\{1,\ 2u,\ 3u^2\}\times\{1,\ 2v,\ 3v^2\}$

$$=(v-u)\{6uv,-3(u+v),\ 2\},$$

则$\vec{n}$方向上的单位向量为

$$\vec{n}^\circ(u, v)=\left\{\frac{6uv}{l}, -\frac{3(u+v)}{l}, \frac{2}{l}\right\},$$

其中 $l=\sqrt{36u^2v^2+9(u+v)^2+4}$. 于是

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ v\to v_0}} \vec{n}^\circ=\left\{\frac{6u_0^2}{l_0}, -\frac{6u_0}{l_0}, \frac{2}{l_0}\right\},$$

其中 $l_0=\sqrt{36u_0^4+36u_0^2+4}$. 而$M_0(u_0,v_0)=(2u_0, 2u_0^2, 2u_0^3)$，故知切面在$M_0$点的极限位置为

$$\begin{aligned}&3u_0^2x-3u_0y+z\\ &=3u_0^2(2u_0)-3u_0(2u_0^2)+2u_0^3\\ &=2u_0^3,\end{aligned}$$

或

$$\frac{3x}{u_0}-\frac{3y}{u_0^2}+\frac{z}{u_0^3}=2.$$

3549. 在曲面 $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ 上求出切平面平行于坐标平面的诸切点.

解 $\vec{n}=\{2(x+y+z), 2(x+2y+2z), 2(x+2y+3z)\}$. 当

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\ x+2y+2z=0,\\ x+2y+3z=\lambda\end{cases}$$

时，$\vec{n}$与$\vec{k}=\{0, 0, 1\}$平行，即切面平行于Oxy平面. 解之，得 $x=0$，$y=-\lambda$, $z=\lambda$. 将求得的x, y, z 值代入所给的曲面方程，得 $\lambda=\pm 2\sqrt{2}$. 于是，切面平行于 Oxy 坐标平面的切点为 $(0, \pm 2\sqrt{2}$,

$\mp 2\sqrt{2}$)．同法可求得切面平行于 Oyz 坐标平面及 Oxz 坐标平面的诸切点分别为（± 4，∓ 2，0）及（± 2，∓ 4，± 2）．

3550．在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上怎样的点，椭球面的法线与坐标轴成等角？

解 $\vec{n}=2\left\{\frac{x}{a^2},\ \frac{y}{b^2},\ \frac{z}{c^2}\right\}$．按题设，应有

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{l}=\frac{\frac{y}{b^2}}{l}=\frac{\frac{z}{c^2}}{l}\quad\left(l=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\right),$$

即

$$\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{z}{c^2}=\lambda.$$

将上式代入椭球面方程，得 $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$．

于是，所求的点为 $x=\pm\frac{a^2}{d}$，$y=\pm\frac{b^2}{d}$，$z=\pm\frac{c^2}{d}$，其中 $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$．

3551．求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面

$$x+4y+6z=0$$

的各切平面．

解 $\vec{n}=2\{x,\ 2y,\ 3z\}$．按题设，应有

$x=\lambda$，$2y=4\lambda$，$3z=6\lambda$，

解之，得 $x=\lambda$，$y=2\lambda$，$z=2\lambda$．将它们代入方程

$x^2+2y^2+3z^2=21$，得$\lambda=\pm1$，故切点为$(\pm1,\pm2,\pm2)$．于是，所求的切面方程为

$$(x\mp1)+4(y\mp2)+6(z\mp2)=0,$$

即

$$x+4y+6z=\pm21.$$

3552. 证明：曲面$xyz=a^3$ ($a>0$) 的切平面与坐标面形成体积一定的四面体．

证 在曲面上任取一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，则曲面在该点的切平面方程为

$$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0\cdot(z-z_0)=0,$$

它与各坐标面的交点为$A(3x_0,0,0)$,$B(0,3y_0,0)$,$C(0,0,3z_0)$．注意到各坐标轴的垂直关系，即知以A、B、C、O诸点为顶点的四面体的体积为

$$V_{ABCO}=\frac{1}{3}OC\cdot\left(\frac{1}{2}OA\cdot OB\right)$$

$$=\frac{1}{6}3z_0\cdot3x_0\cdot3y_0=\frac{9}{2}x_0y_0z_0=\frac{9}{2}a^3,$$

它为一个常数，本题获证．

3553. 证明：曲面

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\quad(a>0)$$

的切平面在坐标轴上割下的诸线段，其和为常量．

证 在曲面上任取一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，则曲面在该点的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即

$$\sqrt{y_0z_0}(x-x_0)+\sqrt{x_0z_0}(y-y_0)+\sqrt{x_0y_0}\cdot(z-z_0)=0.$$

此切面在坐标轴上所割下的诸线段分别为

$$\sqrt{ax_0},\ \sqrt{ay_0},\ \sqrt{az_0},$$

其和为$\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$，它是常数，本题获证.

3554. 证明：锥面

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

的切平面经过其顶点.

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)$. 于是，锥面在任一点$P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$的切面方程为

$$z-z_0=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right](x-x_0)+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0),$$

化简整理得

$$z=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]x+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y,$$

它显然通过锥面$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$的顶点$(0,0,0)$.

3555．证明：旋转面

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2})\quad(f'\neq 0)$$

的法线与旋转轴相交．

证 在旋转面上任取一点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，其中 $z_0=f(\sqrt{x_0^2+y_0^2})$，则曲面在该点的法向量为

$$\vec{n}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ -1\right\}_{P_0}=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

$$\cdot\left\{x_0 f',\ y_0 f',\ -\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right\}.$$

于是，法线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_0 f'}=\frac{y-y_0}{y_0 f'}=\frac{z-z_0}{-\sqrt{x_0^2+y_0^2}},$$

显然，法线通过 Oz 轴上的点

$$\left(0,0,f(\sqrt{x_0^2+y_0^2})+\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{f'(\sqrt{x_0^2+y_0^2})}\right),$$

即法线和 Oz 轴相交．

3556．求椭球面

$$x^2+y^2+z^2-xy=1$$

在坐标面上的射影．

解 先考虑椭球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在Oxy 平面上的射影．该射影即通过所给曲面上的每一点向Oxy平面作垂线所得到的垂足的全体，它是Oxy平面上的一个区域，这个区域的边界由曲面上这样的点的投影构成：这一点向 Oxy 平面所作的垂线在它的切面内（这里用到了椭球面的凸性），即该点的法线与Oxy

平面平行．注意到该点的法向量为$\{2x-y, 2y-x, 2z\}$。因此，该点的坐标满足

$$\begin{cases}2z=0,\\x^2+y^2+z^2-xy=1.\end{cases}$$

这些点的投影为

$$\begin{cases}z=0,\\x^2+y^2-xy=1,\end{cases}$$

它即椭球面在Oxy平面上射影的边界。

同法可考虑切面与Oxz平面垂直，则有

$$2y-x=0.$$

因此，对Oxz平面投影为边界点的椭球面上的点应满足方程

$$\begin{cases}2y-x=0,\\x^2+y^2+z^2-xy=1.\end{cases}$$

这是椭球面与平面的交线，将它改写为柱面与平面的交线

$$\begin{cases}2y-x=0,\\\dfrac{3x^2}{4}+z^2=1.\end{cases}$$

于是，椭球面在Oxz平面上射影的边界由方程

$$\begin{cases}y=0,\\\dfrac{3x^2}{4}+z^2=1\end{cases}$$

所确定．

同法可确定椭球面在Oyz平面上射影的边界由

方程

$$\begin{cases} x=0, \\ \dfrac{3y^2}{4}+z^2=1 \end{cases}$$

所确定.

于是，椭球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在 Oxy 平面上的射影为圆：$x^2+y^2-xy\leqslant 1$，$z=0$；在 Oyz 平面上的射影为椭圆：$\frac{3}{4}y^2+z^2\leqslant 1$，$x=0$；在 Oxz 平面上的射影为椭圆 $\frac{3}{4}x^2+z^2\leqslant 1$，$y=0$.

3557. 分正方形 $\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 为直径 $\leqslant\delta$ 的有限个部分 σ. 若曲面

$$z=1-x^2-y^2$$

在属于同一部分 σ 的任何两点 $P(x,y)$ 及 $P_1(x_1,y_1)$ 的法线方向相差小于1°，求数 δ 的上界.

解 记曲面在点 $P(x,y)$ 及 $P_1(x_1,y_1)$ 的法向量为 $\vec{n}$ 及 $\vec{n}_1$，则 $\vec{n}=\{2x,2y,1\}$，$|\vec{n}|\geqslant 1$，$\vec{n}_1=\{2x_1,2y_1,1\}$，$|\vec{n}_1|\geqslant 1$，且有

$$\vec{n}\times\vec{n}_1=\{2(y-y_1),2(x_1-x),4(xy_1-x_1y)\},$$

$$\sin(\widehat{\vec{n},\vec{n}_1})=\frac{|\vec{n}\times\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|}\leqslant|\vec{n}\times\vec{n}_1|$$

$$=2\sqrt{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2+4(xy_1-x_1y)^2}.$$

注意到 $(xy_1-x_1y)^2=[x(y_1-y)+y(x-x_1)]^2$

$$\leqslant 2[x^2(y_1-y)^2+y^2(x-x_1)^2]$$
$$\leqslant 2[(y-y_1)^2+(x-x_1)^2],$$

并记$\rho=\sqrt{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2}$，即有

$$\sin(\widehat{\vec{n},\vec{n}_1})\leqslant 2\sqrt{\rho^2+4\cdot 2\rho^2}=6\rho.$$

当 $\varphi=(\widehat{\vec{n},\vec{n}_1})<1°$时，$\varphi\approx\sin(\widehat{\vec{n},\vec{n}_1})$. 于是，要$\varphi<\frac{\pi}{180}$，只要$6\rho<\frac{\pi}{180}$，即$\rho<\frac{\pi}{1080}\approx 0.003$即可。

从而得

$$\delta<0.003.$$

3558. 设：

$$z=f(x,\ y)，其中(x,\ y)\in D \qquad (1)$$

为曲面的方程，$\varphi(P_1,\ P)$为曲面(1)在点$P(x,\ y)\in D$及$P_1(x_1,\ y_1)\in D$二点的法线之间的夹角．

证明：若域D有界且为封闭的，函数$f(x,\ y)$在域D内有有界的二阶导函数，则李雅甫诺夫不等式

$$\varphi(P_1,\ P)<C\rho(P_1,\ P) \qquad (2)$$

成立．其中C为常数，$\rho(P_1,\ P)$为点P与P_1之间的距离。

证　本题应加区域是凸的这个条件，否则结论就不成立。例如，

$$z=\begin{cases}0,\ 当y\leqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1,\\ y^3,\ 当y>0,\ x\geqslant y^4,\ x^2+y^2\leqslant 1,\\ -y^3,当y>0,\ x\leqslant -y^4,\ x^2+y^2\leqslant 1,\end{cases}$$

如图6·30所示，函数z在单位圆内缺一个角的闭区域内定义，且有连续的二阶偏导函数，取$P_n\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right)$与$P_n'\left(-\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right)$，则

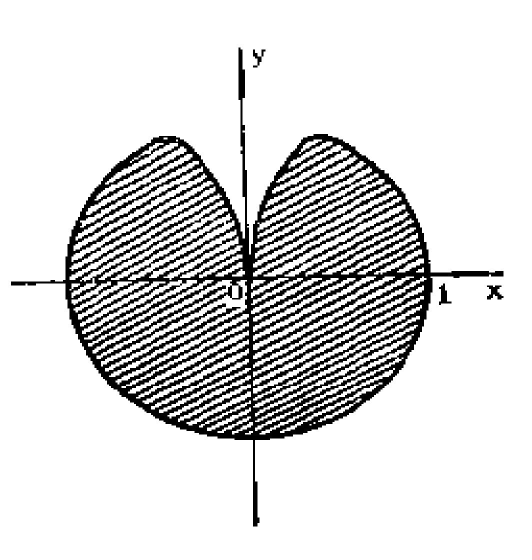


图 6·30

$$\vec{n}=\vec{n}(P_n)=\{0, 3y^2, -1\}_{P_n}=\{0, \frac{3}{n^2}, -1\},$$

$$\vec{n}'=\vec{n}(P_n')=\{0, -3y^2, -1\}_{P_n'}$$

$$=\left\{0, -\frac{3}{n^2}, -1\right\},$$

$$\vec{n}\times\vec{n}'=\left\{-\frac{6}{n^2}, 0, 0\right\},$$

$$\sin\varphi_n=\frac{|\vec{n}\times\vec{n}'|}{|\vec{n}||\vec{n}'|}=\frac{\frac{6}{n^2}}{1+\frac{9}{n^4}}\longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

又因

$$\rho_n(P_n, P_n')=\frac{2}{n^3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n}{\rho_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\varphi_n}{\rho_n}\cdot\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi_n}{\rho_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{6}{n^2}}{1+\dfrac{9}{n^4}}}{\dfrac{2}{n^3}}=+\infty,$$

故不存在常数 C，使 $\varphi_n<C\rho_n$.

下面证明当 D 为凸的有界闭域时，不等式(2)为真.

由 3255 题知：当 $f(x, y)$在 D 内有二阶连续的偏导函数时，$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$在 D 内是二元连续的.又因 D 是有界闭域，故$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$在$D$上有界，记

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|<M,\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|<M.$$

又由 3254 题的证明过程可知：当D是凸域，$f(x, y)$有有界二阶偏导函数时，对D中任意两点P及P_1，$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$满足里普什兹条件，即存在常数 L，使有

$$\left|\frac{\partial f(P)}{\partial x}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right|<L\rho(P_1, P),$$

$$\left|\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right|<L\rho(P_1, P).$$

由$\vec{n}(P_1)=\left\{\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}, \frac{\partial f(P_1)}{\partial y}, -1\right\}$

及 $\vec{n}(P)=\left\{\frac{\partial f(P)}{\partial x},\ \frac{\partial f(P)}{\partial y},\ -1\right\}$ 知：对于 $\varphi=\varphi(P_1,\ P)$ 有下列不等式

$$\sin^2\varphi=\frac{|\vec{n}(P_1)\times\vec{n}(P)|^2}{|\vec{n}(P_1)|^2|\vec{n}(P)|^2}\leqslant|\vec{n}(P_1)\times\vec{n}(P)|^2$$

$$=\left[\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial f(P)}{\partial x}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right]^2$$

$$+\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\frac{\partial f(P)}{\partial x}\right]^2$$

$$<L^2\rho^2+L^2\rho^2+2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right]^2$$

$$\cdot\left[\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2$$

$$+2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}-\frac{\partial f(P)}{\partial x}\right]^2$$

$$<2L^2\rho^2+2M^2L^2\rho^2+2M^2L^2\rho^2$$
$$=2L^2\rho^2(1+2M^2).$$

于是，

$$\sin\varphi<C_1\rho(P_1,P),$$

其中 $C_1^2=2L^2(1+2M^2)$，从而得

$$\varphi(P_1,\ P)<\frac{\pi}{2}\sin\varphi^{*)}<\frac{\pi}{2}C_1\rho(P_1,P)$$
$$=C\rho(P_1,\ P),$$

其中$C=\frac{\pi}{2}C_1$为常数，本题获证．

*）　利用 1290 题的结果．

3559．圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 与曲面 $bz=xy$ 在公共点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$相交成怎样的角？

解　二曲面在 M_0 点的法向量为

$\vec{n}_1=\{y_0, x_0, -b\}$及$\vec{n}_2=\{2x_0, 2y_0, 0\}$．

于是，交角 φ 满足

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{2x_0y_0+2x_0y_0+0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+b^2}\sqrt{4x_0^2+4y_0^2}}$$

$$=\frac{4bz_0}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2a}=\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3560．证明：球坐标的坐标曲面$x^2+y^2+z^2=r^2$，$y=x\operatorname{tg}\varphi$，$x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\theta$ 两两相交．

证　各曲面在其交点 $P(x, y, z)$ 处的法向量分别为

$\vec{n}_1=\{2x, 2y, 2z\}$，$\vec{n}_2=\{\operatorname{tg}\varphi, -1, 0\}$，

$\vec{n}_3=\{2x, 2y, -2z\operatorname{tg}^2\theta\}$．

由于

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=2x\operatorname{tg}\varphi-2y=2y-2y=0,$$

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3=4x^2+4y^2-4z^2\operatorname{tg}^2\theta=4z^2\operatorname{tg}^2\theta-4z^2\operatorname{tg}^2\theta=0,$$

$$\vec{n}_2\cdot\vec{n}_3=2x\operatorname{tg}\varphi-2y=0,$$

故知这些曲面在其交点处分别两两直交．

3561．证明：球 $x^2+y^2+z^2=2ax$，$x^2+y^2+z^2=2by$，$x^2+y^2+z^2=2cz$ 形成三直交系．

证　设球 $x^2+y^2+z^2=2ax$ 与球 $x^2+y^2+z^2=2by$ 交于 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点，则它们在 P_0 点的法向量为

$$\vec{n}_1=\{2(x_0-a), 2y_0, 2z_0\},$$

$$\vec{n}_2=\{2x_0, 2(y_0-b), 2z_0\}.$$

由于

$$\begin{aligned}\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2&=4[x_0(x_0-a)+y_0(y_0-b)+z_0^2]\\&=2[2x_0^2+2y_0^2+2z_0^2-2ax_0-2by_0]\\&=2[(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2ax_0)+(x_0^2+y_0^2\\&\quad+z_0^2-2by_0)]=0,\end{aligned}$$

故知这二球在其交点处直交，同法可证其它球的两两直交性。

3562. 当 $\lambda=\lambda_1$，$\lambda=\lambda_2$，$\lambda=\lambda_3$ 时，经过每一点 $M(x,y,z)$ 有三个二次曲面：

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=-1\quad(a>b>c>0).$$

证明这些曲面是直交的。

证　先证 λ_i $(i=1, 2, 3)$ 的存在性。考虑 λ^2 的多项式

$$\begin{aligned}F(\lambda^2)&=x^2(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)+y^2(a^2-\lambda^2)\\&\cdot(c^2-\lambda^2)+z^2(a^2-\lambda^2)(b^2-\lambda^2)\\&+(a^2-\lambda^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2).\end{aligned}$$

显然有

$$F(a^2)=x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)>0,$$

$$F(b^2)=y^2(a^2-b^2)(c^2-b^2)<0,$$

$$F(c^2)=z^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)>0,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda^2)=-\infty.$$

因此，$F(\lambda^2)=0$ 在 $(a^2, +\infty)$，(b^2, a^2) 及 $(c^2,$

b^2)内各有一根，记为 λ_1^2，λ_2^2，λ_3^2．但$F(\lambda^2)$是关于λ^2的三次多项式，因此，也仅有三个实根λ_i^2（$i=1$，2，3），且知 $\lambda_i\neq\lambda_j$（$i\neq j$；i，$j=1$，2，3）．由$F(\lambda_i^2)=0$不难推得

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_i^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_i^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_i^2}=-1\quad(i=1,\ 2,\ 3).$$

下面再证明这三个二次曲面是两两直交的，由于

$$\vec{n}_i=\left\{\frac{2x}{a^2-\lambda_i^2},\ \frac{2y}{b^2-\lambda_i^2},\ \frac{2z}{c^2-\lambda_i^2}\right\}\quad(i=1,\ 2,3),$$

及当 $i\neq j$ 时，

$$\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j=\frac{4x^2}{(a^2-\lambda_i^2)(a^2-\lambda_j^2)}+\frac{4y^2}{(b^2-\lambda_i^2)(b^2-\lambda_j^2)}$$

$$+\frac{4z^2}{(c^2-\lambda_i^2)(c^2-\lambda_j^2)}$$

$$=\frac{4}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\left[\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda_i^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_i^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_i^2}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda_j^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_j^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_j^2}\right)\right]$$

$$=\frac{4}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}[(-1)-(-1)]=0\,,$$

故本题获证．

3563．求函数 $u=x+y+z$ 在沿球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$点的外法线方向上的导函数．

在球面上怎样的点使得上述的导函数有：(a) 最大值，(б)最小值，(в)等于零？

解 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=1$，则在 M_0 点处球面的外法线单位向量为$\left\{\frac{x_0}{r_0}, \frac{y_0}{r_0}, \frac{z_0}{r_0}\right\}=\{x_0, y_0, z_0\}$.

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}\cdot\{x_0, y_0, z_0\}$$

$$=\{1, 1, 1\}\cdot\{x_0, y_0, z_0\}=x_0+y_0+z_0.$$

(a) 利用 1294 题的结果，得

$$x_0+y_0+z_0=1\cdot x_0+1\cdot y_0+1\cdot z_0$$
$$\leqslant\sqrt{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\sqrt{3}.$$

当 $x_0=y_0=z_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$时，上述等式成立，此点恰在球面上. 因此，在$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$点$\frac{\partial u}{\partial n}$取得最大值.

(б) 同法可得

$$-(x_0+y_0+z_0)=(-1)x_0+(-1)y_0$$
$$+(-1)z_0\leqslant\sqrt{3},$$

或

$$x_0+y_0+z_0\geqslant-\sqrt{3}.$$

故在点$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\frac{\partial u}{\partial n}$取得最小值.

(в) 当 $x+y+z=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$ 时 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$。因此，所求的点为由方程

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

所确定的解 (x, y, z)，它在单位球面与过圆心的平面 $x+y+z=0$ 的交线——圆上面。

3564. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在沿椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的外法线方向上的导函数。

解 $\vec{n}=\left\{\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right\}$，此法向量的单位向量为 $\vec{n}^\circ=\left\{\frac{x_0}{a^2\varDelta}, \frac{y_0}{b^2\varDelta}, \frac{z_0}{c^2\varDelta}\right\}$，其中

$$\varDelta=\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}.$$

于是，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{M_0}=\frac{x_0}{a^2\varDelta}2x_0+\frac{y_0}{b^2\varDelta}2y_0+\frac{z_0}{c^2\varDelta}2z_0$$

$$=\frac{2}{\varDelta}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)=\frac{2}{\varDelta}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

3565. 设 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 u 和 v 在沿曲面 $F(x, y, z)=0$

上的点的法线方向上的导函数，证明：

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

证 $\frac{\partial}{\partial n}(uv)=\frac{\partial}{\partial x}(uv)\cos\alpha$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(uv)\cos\beta+\frac{\partial}{\partial z}(uv)\cos\gamma$$

$$=u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)$$

$$+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)$$

$$=u\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

求含一个参变数的平面曲线族的包线：

3566. $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ （$p=$常数）.

解 $\begin{cases} f(x,\ y,\ \alpha)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \\ f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha)=-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0. \end{cases}$

消去α，得

$$x^2+y^2=p^2. \tag{1}$$

由于原曲线族没有奇点，且(1)也不是原曲线族中的某一支，故(1)为原曲线族的包线方程.

3567. $(x-a)^2+y^2=\frac{a^2}{2}$.

解 $\begin{cases}(x-a)^2+y^2-\dfrac{a^2}{2}=0,\\ 2(x-a)+a=0.\end{cases}$

消去a，得$y=\pm x$,同3566题的理由可知,它是包线方程.

3568. $y=kx+\dfrac{a}{k}$ ($a=$常数).

解 $\begin{cases}kx-y+\dfrac{a}{k}=0,\\ x-\dfrac{a}{k^2}=0.\end{cases}$

消去k，得$y^2=4ax$，同3566题的理由可知，它是包线方程.

3569. $y^2=2px+p^2$.

解 $\begin{cases}2px-y^2+p^2=0,\\ x+p=0.\end{cases}$

消去p，得$x^2+y^2=0$，它仅为一点$(0,0)$.于是，原曲线族无包线.

3570. 设有长为l的线段，其两端点沿坐标轴滑动，求如此产生的线段族的包线.

解 如图6·31所示，直线方程为

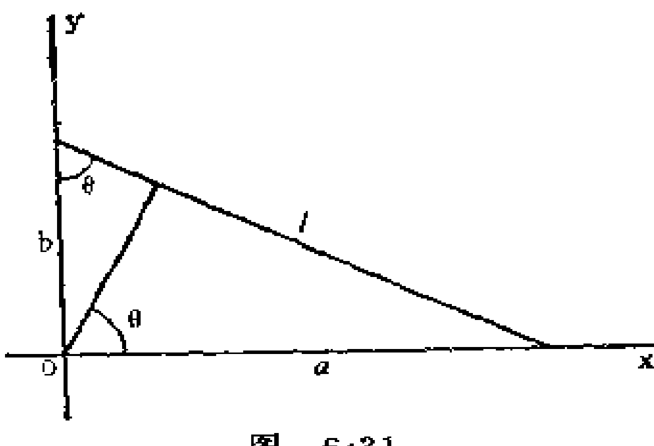


图 6·31

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

但是 $a=l\sin\theta$，$b=l\cos\theta$，所以，

$$\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}=l. \qquad (1)$$

对 θ 求导数，得

$$-\frac{x}{\sin^2\theta}\cos\theta+\frac{y}{\cos^2\theta}\sin\theta=0$$

或
$$\frac{x}{\sin^3\theta}=\frac{y}{\cos^3\theta}. \qquad (2)$$

由(1)，(2)消去 θ，得 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$，同 3566 题的理由可知，它是包线方程.

3571. 求椭圆族 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的包线，已知此族中椭圆的面积 S 为常数.

解 由题设 $\pi ab=S$，得 $a=\frac{S}{\pi b}$，且

$$\frac{\pi^2b^2x^2}{S^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

对 b 求导数，得

$$\frac{2\pi^2bx^2}{S^2}-\frac{2y^2}{b^3}=0. \qquad (2)$$

由(2)式 $b^4=\frac{y^2S^2}{\pi^2x^2}$ 或 $b^2=\pm\frac{yS}{\pi x}$. 再代入(1)，得

$$\pm\frac{\pi xy}{S}\pm\frac{\pi xy}{S}=1$$，即

$$|xy|=\frac{S}{2\pi},$$

同3566题的理由可知，它是包线方程．

3572．炮弹在真空中以初速度 v_0 射出，当投射角 α 在铅垂平面中变化下，求炮弹轨道的包线．

解 炮弹轨道方程为

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{1}$$

对 α 求导数，得

$$0=\frac{x}{\cos^2\alpha}-\frac{gx^2\sin\alpha}{v_0^2\cos^3\alpha}. \tag{2}$$

由(2)式得 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_0^2}{xg}$．代入(1)式，得

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}=x\frac{v_0^2}{xg}-\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1+\frac{v_0^4}{x^2g^2}\right)$$

$$=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2},$$

同3566题的理由可知，它是包线方程．

3573．证明：平面曲线的法线的包线是此曲线的渐屈线．

证 这里我们仅就由显式 $y=f(x)$ 所给出的平面曲线情形加以证明．

曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,\ y)$ 的法线方程为

$$(X-x)+y'(Y-y)=0\ . \tag{1}$$

对 x 求导数，得

$$-1+y''(Y-y)-y'^2=0$$

或

$$y''(Y-y)=1+y'^2. \qquad (2)$$

由(1)，(2)解得

$$\begin{cases} X=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ Y=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}, \end{cases}$$

此即 $y=f(x)$ 的渐屈线方程(参看第二章§14前言3°)．同 3566 题的理由可知，它是平面曲线的法线的包线方程．

3574．研究下列曲线族的判别曲线的性质（c——参变数）：

(a) 立方抛物线 $y=(x-c)^3$；

(б) 半立方抛物线 $y^2=(x-c)^3$；

(в) 奈尔半立方抛物线 $y^3=(x-c)^2$；

(г) 环索线 $(y-c)^2=x^2\dfrac{a-x}{a+x}$．

解 (a) $\begin{cases} f(x,\ y,\ c)=y-(x-c)^3=0, \\ f'_c(x,\ y,\ c)=3(x-c)^2=0. \end{cases}$

消去 c，得 $y=0$，它为判别曲线的方程．

原曲线无奇点，且 $y=0$ 也不是原曲线族的某一支，因此，它是包线．此包线与原曲线在 $(c,0)$ 点相切，且 $(c,0)$ 点是曲线的拐点，即它又是原曲线族拐点的轨迹．如图6·32(1)所示．

(б) $\begin{cases} y^2-(x-c)^3=0\,, \\ 3(x-c)^2=0\,. \end{cases}$

消去 c，得判别曲线 $y=0$．

原曲线的奇点为（c，0），因此它是奇点的轨迹．要看是否为包线，还要看在奇点的两支是否与判别曲线相切．事实上，两支分别为 $y_1=(x-c)^{\frac{3}{2}}$，$y_2=-(x-c)^{\frac{3}{2}}$，均有 $y_1'(c)=0$，$y_2'(c)=0$．因此，$y=0$ 为原曲线族的包线．如图 6·32(2)所示．

(в) $\begin{cases} y^3-(x-c)^2=0\,, \\ 2(x-c)=0\,. \end{cases}$

消去 c，得判别曲线 $y=0$．

原曲线的奇点为$(c,0)$．由于$y=(x-c)^{\frac{2}{3}}$在$x=c$处的导数为无穷，因此，它与 $y=0$ 不相切，从而它无包线．奇点（c，0）为尖点．如图6·32(3)所示．

(г) $\begin{cases} (y-c)^2-x^2\dfrac{a-x}{a+x}=0\,, \\ -2(y-c)=0\,. \end{cases}$

消去 c，得 $x^2(a-x)=0$，即判别曲线为直线 $x=0$ 及 $x=a$．

显然 $x=0$ 为原曲线族奇点的轨迹，用§6．的方法可判别出它是二重点的轨迹．事实上，

$A=f''_{xx}(0,c)=2$，$B=f''_{xy}(0,c)=0$，

$C=F''_{yy}(0,c)=-2$，$AC-B^2=-4<0$．

从而知 $x=0$不是包线．

但是，在 $x=a$ 处 $f'_x(a,y)\neq 0$ $(a\neq 0)$．因此 $x=a$ 不是原曲线族奇点的轨迹，同时它又不是原曲线族的某一支．因此，$x=a$ 是原曲线族的包线，如图 6·32(4)所示．

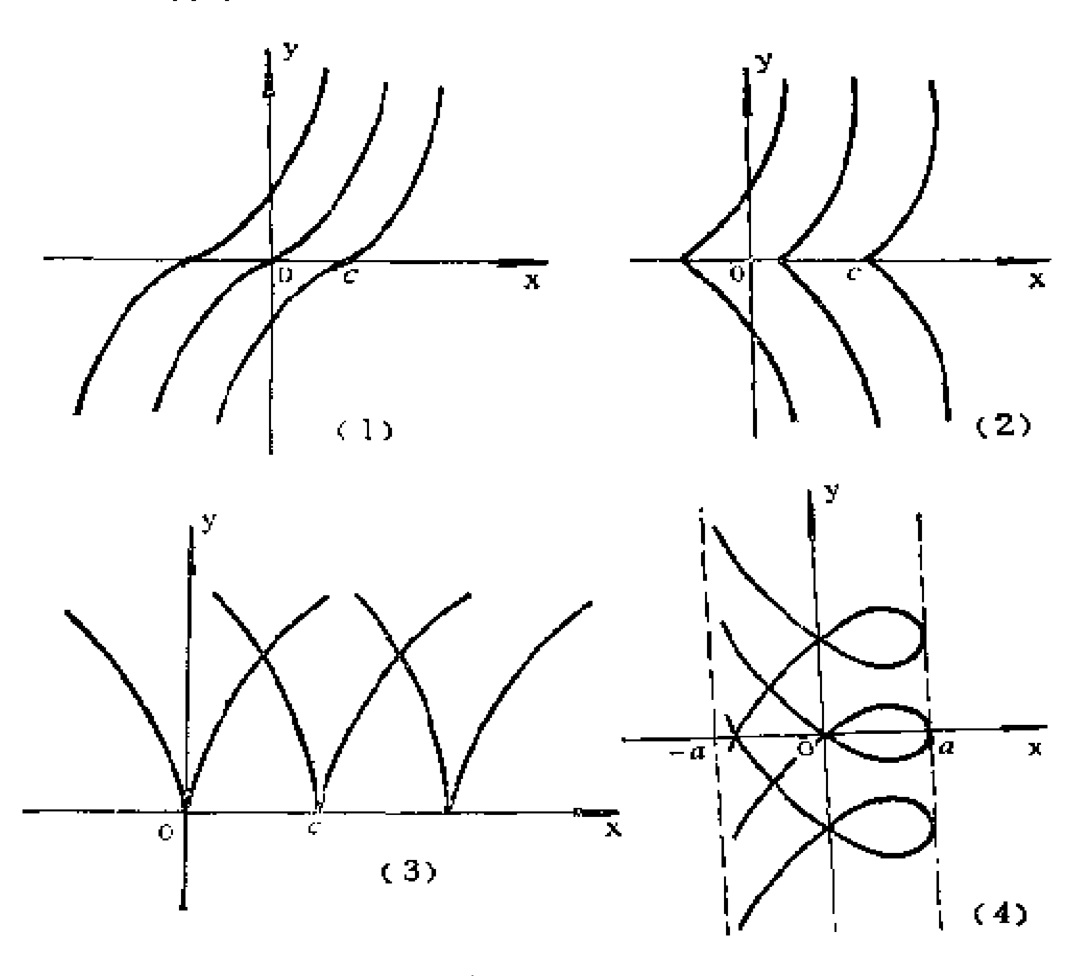


图 6·32

3575．求半径为 r，中心在圆周 $x=R\cos t$，$y=R\sin t$，$z=0$ (t—参数，$R>r$)上的球族的包面．

解
$$\begin{cases}(X-R\cos t)^2+(Y-R\sin t)^2+Z^2=r^2, & (1)\\ 2R\sin t(X-R\cos t)-2R\cos t(Y-R\sin t)=0. & (2)\end{cases}$$

(2)式化简得 $X\sin t - Y\cos t = 0$. 于是，

$$\operatorname{tg} t = \frac{Y}{X}, \quad \cos t = \pm \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

$$\sin t = \pm \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \qquad (3)$$

将(3)式代入(1)式，得

$$(X^2+Y^2)\left(1 \pm \frac{R}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)^2 + Z^2 = r^2.$$

当取"＋"号时，由于 $R^2 > r^2$，故它不代表任何点(不是虚的）的轨迹.

当取"－"号时，由于原曲面族无奇点，且 $(\sqrt{X^2+Y^2} - R)^2 + Z^2 = r^2$ 不是原曲面族的某一个，因此，它是原曲面族的包面（圆环）.

3576. 求球族

$$(x - t\cos\alpha)^2 + (y - t\cos\beta)^2 + (z - t\cos\gamma)^2 = 1$$

(其中 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 及 t—参变数)的包面.

解 $$\begin{cases} (x - t\cos\alpha)^2 + (y - t\cos\beta)^2 \\ + (z - t\cos\gamma)^2 - 1 = 0, & (1) \\ -2\cos\alpha(x - t\cos\alpha) - 2\cos\beta(y - t\cos\beta) \\ -2\cos\gamma(z - t\cos\gamma) = 0. & (2) \end{cases}$$

由(2)得 $$t = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma. \qquad (3)$$

将(3)式代入(1)式，化简整理得

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 = 1. \qquad (4)$$

由于原曲面族的奇点均不在此方程所表示的曲面上，并且曲面(4)也不是原曲面族中的某一个，因此，曲面(4)为原曲面族的包面.

3577. 求椭球面族$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的包面，这些椭球的体积$V$是常数.

解 引入辅助函数

$$F(x,y,z,a,b,c)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\lambda abc,$$

则包面的方程由方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, & (1) \\ abc=\frac{3V}{4\pi}, & (2) \\ F'_a=-\frac{2x^2}{a^3}+\lambda bc=0, & (3) \\ F'_b=-\frac{2y^2}{b^3}+\lambda ac=0, & (4) \\ F'_c=-\frac{2z^2}{c^3}+\lambda ab=0 & (5) \end{cases}$$

确定.

由(3)、(4)、(5)可解得

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{\lambda abc}{2}=\mu. \qquad (6)$$

将(6)式代入(1)式，得

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\mu=\frac{1}{3}.$$

于是，

$$a=\sqrt{3}|x|,\ b=\sqrt{3}|y|,\ c=\sqrt{3}|z|. \qquad (7)$$

将(7)式代入(2)式，得

$$|xyz|=\frac{V}{4\pi\sqrt{3}}. \qquad (8)$$

由于原曲面族无奇点，且曲面(8)也不是原曲面族中的某一个，故知曲面(8)为原曲面族的包面.

3578. 求半径为 ρ，中心在圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 上的球族的包面.

解 设球心为(a,b,c)，则球的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2,$$

其中 $a^2+b^2=c^2$.

引入辅助函数

$$F(x,y,z,a,b,c)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\lambda(a^2+b^2-c^2),$$

则包面方程由方程组

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2, & (1)\\ a^2+b^2=c^2, & (2)\\ F'_a=-2(x-a)+2\lambda a=0, & (3)\\ F'_b=-2(y-b)+2\lambda b=0, & (4)\\ F'_c=-2(z-c)-2\lambda c=0 & (5)\end{cases}$$

确定.

由(3)、(4)、(5)可得

$$\frac{x}{a}-1=\frac{y}{b}-1=-\frac{z}{c}+1=\lambda.$$

引入记号$\frac{1}{\mu}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=2-\frac{z}{c}$，则有

$$a=\mu x,\ b=\mu y,\ c=\frac{\mu z}{2\mu-1}. \tag{6}$$

将(6)式代入(1),(2)两式，得

$$\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{z^2}{(2\mu-1)^2}=\dfrac{\rho^2}{(\mu-1)^2}, & (7)\\ x^2+y^2-\dfrac{z^2}{(2\mu-1)^2}=0. & (8)\end{cases}$$

(7)+(8)得

$$2(x^2+y^2)=\frac{\rho^2}{(\mu-1)^2}$$

或
$$\sqrt{2}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\ |2\mu-2|. \tag{9}$$

由(8)得 $2\mu-1=\pm\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (10)

将(10)代入(9)，整理得

$$\sqrt{2}\ \rho=|\sqrt{x^2+y^2}\ \pm z|. \tag{11}$$

由于原曲面族无奇点，且曲面(11)也不是原曲面族的某一个。因此，曲面(11)为原曲面族的包面.

3579. 有一发光点位于坐标原点．若 $x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2$，求由球

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant R^2$$

投影所生成的阴影圆锥．

解 解法一

所求的阴影圆锥的表面，可看作是一个过原点的平面族的包面，此平面族的方程为

$$ax+by+cz=0,$$

其中 a,b,c 满足约束条件

$$\begin{cases} ax_0+by_0+cz_0=\pm R, \\ a^2+b^2+c^2=1. \end{cases}$$

引进辅助函数

$F(x,y,z,a,b,c)=ax+by+cz+\lambda(ax_0+by_0+cz_0)+\mu(a^2+b^2+c^2)$,

则包面方程由方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, & (1) \\ a^2+b^2+c^2=1, & (2) \\ ax_0+by_0+cz_0=\pm R, & (3) \\ F'_a=x+\lambda x_0+2\mu a=0, & (4) \\ F'_b=y+\lambda y_0+2\mu b=0, & (5) \\ F'_c=z+\lambda z_0+2\mu c=0 & (6) \end{cases}$$

确定。

方程 (4)、(5)、(6)要能解出 λ,μ，其中 a、b、c 必须满足关系式

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & a \\ y & y_0 & b \\ z & z_0 & c \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

记 $r_1=\begin{vmatrix} y & y_0 \\ z & z_0 \end{vmatrix}$，$r_2=\begin{vmatrix} z & z_0 \\ x & x_0 \end{vmatrix}$，$r_3=\begin{vmatrix} x & x_0 \\ y & y_0 \end{vmatrix}$，

则上述关系式可记为 $ar_1+br_2+cr_3=0$. (8)

由(1)、(3)、(8)可解得

$$a=-\frac{\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ \pm R & y_0 & z_0 \\ 0 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}}=\frac{\pm R(zr_2-yr_3)}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}$$

或

$$a^2=\frac{R^2(zr_2-yr_3)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2}.$$

$$b^2=\frac{R^2(xr_3-zr_1)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2},\quad c^2=\frac{R^2(xr_2-yr_1)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2}. \tag{9}$$

将(9)式代入(2)式，即得

$$\begin{aligned}(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2&=R^2[(yr_3-zr_2)^2\\&\quad+(xr_3-zr_1)^2+(xr_2-yr_1)^2]\\&=R^2[(r_1^2+r_2^2+r_3^2)(x^2+y^2+z^2)\\&\quad-(xr_1+yr_2+zr_3)^2]\\&=R^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2)(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

〔其中利用了 $xr_1+yr_2+zr_3=0$，这是不难验证的。〕于是，有

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2=R^2(x^2+y^2+z^2). \tag{10}$$

由于原平面族无奇点，且曲面(10)不是平面族的某一个，因此，曲面(10)即为包面。所求的阴影圆锥为此锥面的内部，即满足不等式

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$

的空间区域（严格说来，还要除去球前部的区域）。

解法二

显然，阴影圆锥是由通过坐标原点的球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ 的全体切线构成的。由解析几何知，如果点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 不在二次曲面

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z)&=ax^2+by^2+cz^2+2fyz\\
&\quad+2gxz+2hxy+2px+2qy+2rz+d\\
&=\varphi(x,y,z)+2px+2qy+2rz+d=0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

上，则通过点 P_1 而和二次曲面(1)相切的全体切线所构成的锥面方程为

$$
\begin{aligned}
&[(x-x_1)F'_x(x_1,y_1,z_1)+(y-y_1)\\
&\cdot F'_y(x_1,y_1,z_1)+(z-z_1)F'_z(x_1,y_1,z_1)]^2\\
&-4\varphi(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)\\
&\cdot F(x_1,y_1,z_1)=0. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

今有

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z)&=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\\
&\quad+(z-z_0)^2-R^2\\
&=x^2+y^2+z^2-2(x_0x+y_0y+z_0z)\\
&\quad+(x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2).
\end{aligned}
$$

由于

$$
F'_x(0,0,0)=-2x_0,\quad F'_y(0,0,0)=-2y_0,
$$
$$
F'_z(0,0,0)=-2z_0,
$$

故由(2)即得阴影圆锥面的方程为

$$
\begin{aligned}
&(-2x_0x-2y_0y-2z_0z)^2-4(x^2+y^2+z^2)\\
&\cdot(x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2)=0
\end{aligned}
$$

或

$$
(y_0^2+z_0^2)x^2+(x_0^2+z_0^2)y^2+(x_0^2+y_0^2)z^2
$$

$$-2x_0y_0xy-2y_0z_0yz-2z_0x_0zx$$
$$-R^2(x^2+y^2+z^2)=0.$$

由于

$$(y_0^2+z_0^2)x_0^2+(x_0^2+z_0^2)y_0^2+(x_0^2+y_0^2)z_0^2$$
$$-2x_0^2y_0^2-2y_0^2z_0^2-2z_0^2x_0^2$$
$$-R^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=-R^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)<0,$$

故所求的阴影圆锥为此锥面的内部，即满足不等式

$$(y_0^2+z_0^2)x^2+(z_0^2+x_0{}^2)y^2$$
$$+(x_0^2+y_0^2)z^2-2x_0y_0xy-2y_0z_0yz$$
$$-2z_0x_0zx-R^2(x^2+y^2+z^2)\leqslant 0$$

或

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y & z \\ y_0 & z_0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ z_0 & x_0 \end{vmatrix}^2$$
$$\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$

的空间区域（严格说来，还要除去球前部的区域）.

解法三

如图 6·33 所示，由三角形的面积公式

$$\frac{1}{2}|\vec{r}|\cdot|\vec{l}_0|\sin\alpha$$

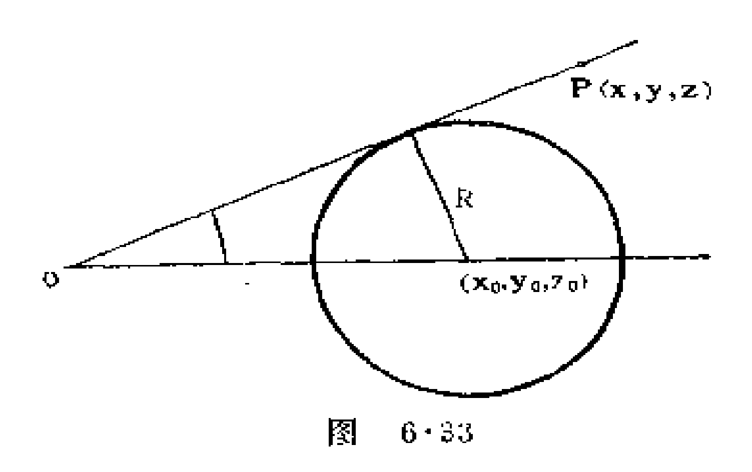


图 6·33

得到

$$|\vec{r}\times\vec{l}_0|=|\vec{r}|\cdot|\vec{l}_0|\cdot\frac{R}{|\vec{l}_0|},$$

其中 $\vec{l}_0=\{x_0, y_0, z_0\}$，$\vec{r}=\{x, y, z\}$，而$P(x,y,z)$为锥面上的任意一点．平方之，即得圆锥曲面的方程为

$$|\vec{r}\times\vec{l}_0|^2=R^2|\vec{r}|^2.$$

于是，所求的阴影圆锥为适合不等式

$$|\vec{r}\times\vec{l}_0|^2\leqslant R^2|\vec{r}|^2,$$

即

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y^0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y & z \\ y_0 & z_0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ z_0 & x_0 \end{vmatrix}^2$$
$$\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$

的空间区域（严格说来，还要除去球前部的区域）．

3580．若参变量 p 和 q 受方程

$$p^2+q^2=1$$

的限制，求平面族

$$z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0)$$

的包面．

解 解法一

引进辅助函数

$$F(x,y,z,p,q)=z-z_0-p(x-x_0)$$
$$-q(y-y_0)+\lambda(p^2+q^2),$$

则包面方程由方程组

$$
\begin{cases}
z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0), & (1)\\
p^2+q^2=1, & (2)\\
F'_p=-(x-x_0)+2\lambda p=0, & (3)\\
F'_q=-(y-y_0)+2\lambda q=0 & (4)
\end{cases}
$$

确定.

(3)$\times p+$(4)$\times q$，得$2\lambda=z-z_0$.于是，由(3)，(4)得

$$
p=\frac{x-x_0}{z-z_0},\quad q=\frac{y-y_0}{z-z_0}. \tag{5}
$$

将（5）式代入（1）式，得

$$
(z-z_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2.
$$

由于原平面族无奇点，且显见上述曲面不是平面，故上述曲面即为包面.

解法二

引入新参数θ；令 $p=\sin\theta$，$q=\cos\theta$.

$$
\begin{cases}
z-z_0=\cos\theta\cdot(x-x_0)+\sin\theta\cdot(y-y_0), & (1)\\
\sin\theta\cdot(x-x_0)=\cos\theta\cdot(y-y_0). & (2)
\end{cases}
$$

于是，

$$
\sin\theta=\frac{\pm(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}},
$$

$$
\cos\theta=\frac{\pm(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}.
$$

代入（1）式，得

$$
(z-z_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2.
$$

由于原平面族无奇点，且上述曲面不是平面，故上述曲面即为包面.

§6. 台劳公式

1° 台劳公式　若函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的某邻域内有直到 $n+1$ 阶（连 $n+1$ 阶的在内）的一切连续偏导函数，则在此邻域内下面的公式成立

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{i}f(a,b)+R_n(x,y), \tag{1}$$

其中

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}f\left[a+\theta_n(x-a),\ b+\theta_n(y-b)\right]\quad(0<\theta_n<1).$$

2° 台劳级数　若函数 $f(x,y)$ 可以无穷次地微分及 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x,y)=0$，则此函数可表成幂级数的形状

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i+j\geq 1}^{\infty}\frac{1}{i!\,j!}f^{(i+j)}_{x^i y^j}(a,b)(x-a)^i(y-b)^j. \tag{2}$$

特别情形，当 $a=b=0$ 时公式(1)和(2)分别名为马克老林公式和马克老林级数.

对于多于两个变量的函数有类似的公式。

3° 平面曲线的奇点　设在某点 $M_0(x_0, y_0)$ 可微分两次的曲线 $F(x, y)=0$ 适合下列条件

$$F(x_0, y_0)=0,\ F'_x(x_0, y_0)=0, F'_y(x_0, y_0)=0$$

及数

$$A=F''_{xx}(x_0, y_0), B=F''_{xy}(x_0, y_0), C=F''_{yy}(x_0, y_0)$$

不全为零．于是，若

(1) $AC-B^2>0$，则 M_0—孤立点；

(2) $AC-B^2<0$，则 M_0—二重点（节）；

(3) $AC-B^2=0$，则 M_0—上升点或孤立点．

在 $A=B=C=0$ 的情形，奇点的种类可能更复杂．至于不属于光滑的曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线，奇点还可能有更复杂的类型：中断的点，角点等等．

3581．在点 $A(1, -2)$ 的邻域内根据台劳公式展开函数

$$f(x, y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5.$$

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=4x-y-6$，$\frac{\partial f}{\partial y}=-x-2y-3$；

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$$

所有三阶偏导函数均为零，因此，有 $R_2(x, y)=0$．在点 $A(1, -2)$ 处，

$$f(1, -2)=5, \frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$$

于是，

$$f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)\cdot(y+2)-(y+2)^2.$$

3582．在点 $A(1,1,1)$ 的邻域内根据台劳公式展开函数

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3yz$，$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3xz$，

$$\frac{\partial f}{\partial z}=3z^2-3xy;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x，\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y，\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6z，$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3z，\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-3x，$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-3y;$$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}=6$，$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=-3$，其余的三阶混合偏导函数均为零；

所有的四阶偏导函数均为零，因此，$R_3(x,y,z)=0$．在点 $A(1,1,1)$ 处，

$f(1,1,1)=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=6$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-3$，$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}=6$，

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=-3,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\cdots=\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial x}=0.$$ 于是，

$$f(x,y,z)=f(1,1,1)+\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i!}\Big[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}+(z-1)\frac{\partial}{\partial z}\Big]^i f(1,1,1)$$

$$=3[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)]+(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1).$$

3583. 当从$x=1,y=-1$变到$x_1=1+h$，$y_1=-1+k$时，求函数$f(x,y)=x^2y+xy^2-2xy$的增量。

解 记$A(1,-1)$及$P(1+h,-1+k)$，则

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_A=(2xy+y^2-2y)\Big|_A=1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_A=(x^2+2xy-2x)\Big|_A=-3;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_A=2y\Big|_A=-2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_A=2x\Big|_A=2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_A=(2x+2y-2)\Big|_A=-2;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_A=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\Big|_A=0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\Big|_A=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\Big|_A=2;$$

所有四阶偏导函数均为零，因此，$R_3(x,y)=0$。于是，按台劳公式即得

$$\Delta f=f(P)-f(A)=\sum_{i=1}^{3}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(A)$$

$$=(h-3k)+(-h^2-2hk+k^2)+hk(h+k).$$

3584．设：

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2$$
$$+2Dxy+2Exz+2Fyz,$$

按数 h,k 和 l 的正整数幂展开 $f(x+h,y+k,z+l)$。

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=2(Ax+Dy+Ez)$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2A$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2D$，

$\frac{\partial f}{\partial y}=2(By+Dx+Fz)$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2B$，

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=2F$，

$\frac{\partial f}{\partial z}=2(Cz+Ex+Fy)$，$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2C$，$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=2E$。

所有三阶偏导函数均为零，因此，$R_2(x,y)=0$。于是，按台劳公式即得

$$f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^i f(x,y,z)$$

$$=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+Ez)$$
$$+k(By+Dx+Fz)+l(Cz+Ex+Fy)]$$
$$+[Ah^2+Bk^2+Cl^2+2Dhk+2Ehl+2Fkl]$$
$$=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+Ez)+k(Dx$$

$$+By+Fz)+l(Ex+Fy+Cz)]+f(h,k,l).$$

3585. 写出函数

$$f(x,\ y)=x^y$$

在点 $A(1,1)$ 的邻域内的展开式，到二次项为止.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=y(y-1)(y-2)x^{y-3},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=x^y\ln^3 x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=yx^{y-1}\ln^2 x+2x^{y-1}\ln x.$$

于是，按台劳公式在点(1,1)附近展到二次项，得

$x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+R_2[1+\theta(x-1),\ 1+\theta(y-1)]$，$0<\theta<1$，其中余项

$$R_2(x,y)=\frac{1}{3!}\{y(y-1)(y-2)x^{y-3}dx^3$$

$$+3[(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x]dx^2dy$$

$$+3[yx^{y-1}\ln^2 x+2x^{y-1}\ln x]dxdy^2+x^y\ln^3 xdy^3\}$$

$$=\frac{1}{6}x^y\left[\left(\frac{y}{x}dx+\ln xdy\right)^3+3\left(\frac{y}{x}dx+\ln x\cdot dy\right)\right.$$

$$\cdot\left(-\frac{y}{x^2}dx^2+\frac{2}{x}dxdy\right)+\left(\frac{2y}{x^3}dx^3-\frac{3}{x^2}dx^2dy\right)\Big],$$

$$dx=x-1\text{ , }dy=y-1\text{ .}$$

3586．根据马克老林公式展开函数

$$f(x,\ y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

到四次项为止。

解 由于

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+\cdots$$

$$\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3,$$

故得

$$f(x,\ y)=\sqrt{1-x^2-y^2}=[1+(-x^2-y^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2.$$

3587．若$|x|$和$|y|$同1比较为很小的量，对于下列二式

(a) $\frac{\cos x}{\cos y}$； (б) $\operatorname{arctg}\frac{1+x+y}{1-x+y}$

推出准确到二次项的近似公式。

解 (a) $\frac{\cos x}{\cos y}=\cos x\cdot(1-\sin^2 y)^{-\frac{1}{2}}$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 y+\cdots\right)$$

$$\approx\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 y\right)$$

$$\approx\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}y^2\right)\approx 1-\frac{1}{2}(x^2-y^2).$$

(б) $$\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x+y}{1-x+y}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\dfrac{x}{1+y}}{1-\dfrac{x}{1+y}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+y}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{x}{1+y}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+y}\right)^3+\cdots$$

$$\approx\frac{\pi}{4}+x(1-y+y^2)\approx\frac{\pi}{4}+x-xy.$$

3588. 假定 x,y,z 的绝对值是很小的量，简化下式

$$\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z.$$

解 我们简化上式到二次项。

$$\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z$$

$$\approx 1-\frac{1}{2}(x+y+z)^2-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$\cdot\left(1-\frac{1}{2}y^2\right)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right).$$

$$\approx 1-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)$$

$$-\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}z^2\right)$$

$$=-(xy+yz+zx).$$

3589．依 h 的乘幂把函数

$$F(x,y)=\frac{1}{4}[f(x+h,y)+f(x,y+h)$$

$$+f(x-h,\ y)+f(x,y-h)]-f(x,y)$$

展开，准确到 h^4.

解　记$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}$，…余类似，

即得

$$F(x,y)=\frac{1}{4}\{[f(x+h,y)-f(x,y)]$$

$$+[f(x,y+h)-f(x,y)]$$

$$+[f(x-h,y)-f(x,\ y)]+[f(x,y-h)$$

$$-f(x,\ y)]\}$$

$$\approx\frac{1}{4}\left\{\left[h\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right]\right.$$

$$+\left[h\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right]$$

$$+\left[-h\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right]$$

$$+\left[-h\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right]\right\}$$

$$=\frac{h^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\frac{h^4}{48}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right).$$

3590. 已知中心在点 $P(x,y)$ 半径为 ρ 的圆周，设 $f(P)=f(x,y)$ 及 $P_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3)$ 为已知圆周之内接正三角形的顶点，并且 $x_1=x+\rho, y_1=y$。依 ρ 的正整数幂把函数

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]$$

展开准确到 ρ^2。

解 如图6·34所示。$\Delta P_1P_2P_3$ 之三顶点分别为

$P_1(x+\rho,\ y)$,

$P_2\left(x-\frac{\rho}{2},\ y+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right)$,

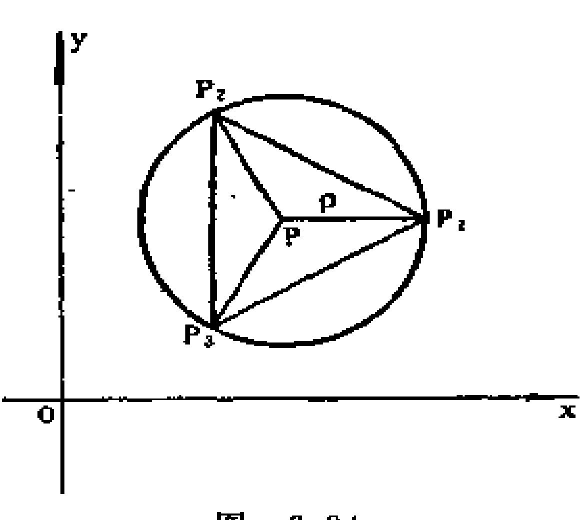


图 6·34

$P_3\left(x-\frac{\rho}{2},\ y-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right)$.

于是，

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]$$

$$\approx\frac{1}{3}\left\{\left[f(P)+\rho\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]+\left[f(P)\right.\right.$$

$$+\left(-\frac{\rho}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\left.+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]$$

$$+\left[f(P)+\left(-\frac{\rho}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]\right\}$$

$$=f(P)+\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

3591. 依 h 与 k 的乘幂把函数

$$\Delta_{xy}f(x,y)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)$$
$$-f(x,y+k)+f(x,y)$$

展开.

解 $$\Delta_{xy}f(x,y)=\left[f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\right.$$

$$\left.\frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\right]-\left[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right]$$

$$-\left[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right]+f(x,y)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$$

$$=hk\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^{m-1}k^{n-m-1}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right].$$

3592．依 ρ 的乘幂把函数

$$F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)d\varphi$$

展开．

解 $$F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x, y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^n\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi}{m!(n-m)!}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\right]d\varphi$$

$$=f(x, y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^n}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi.$$

下面计算上式中的积分．

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(\pi-\varphi)\sin^{n-m}(\pi-\varphi)d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(\pi+\varphi)\sin^{n-m}(\pi+\varphi)\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(2\pi-\varphi)\sin^{n-m}(2\pi-\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}[1+(-1)^m+(-1)^n+(-1)^{n-m}]$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi.$$

当 m，n 中至少有一个为奇数时，显见上述积分为零。当 m,n 均为偶数时，由 2290 题的结果知：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2m}\varphi\sin^{2n-2m}\varphi d\varphi=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}\varphi\sin^{2n-2m}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n+1}m!n!(n-m)!}=\frac{(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n}m!n!(n-m)!}.$$

代入原式，并注意到其中的 m、n 只能为偶数，适当改变一下指标的编号，即得

$$F(\rho)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^{2n}}{(2m)!(2n-2m)!}$$

$$\cdot\frac{\partial^{2n}f(x,y)}{\partial x^{2m}\partial y^{2n-2m}}\cdot\frac{(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n}m!n!(n-m)!}$$

$$=f(x,y)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}$$

$$\cdot\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{\partial^{2n}f(x,y)}{\partial x^{2m}\partial y^{2n-2m}}$$

$$=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n f(x,y).$$

将下列函数展开成马克老林级数：

3593. $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$.

解 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n=\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}\right.$

$\left.\cdot x^2+\cdots\right]\left[1+ny+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\cdots\right]$

$$=1+(mx+ny)+\frac{1}{2!}[m(m-1)x^2$$

$$+2mnxy+n(n-1)y^2]+\cdots$$

$$(|x|<1,|y|<1).$$

3594. $f(x,y)=\ln(1+x+y)$.

解 $f(x,y)=\ln[1+(x+y)]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x+y)^k$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}x^my^{k-m}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{m!(k-m)!}x^my^{k-m} \qquad (1)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m-1}(m+n-1)!}{m!n!}x^my^n. \qquad (2)$$

当 $m=0$，$n=0$ 时，分子出现$(-1)!$，规定该项为零．下面讨论一下收敛区间．(1)成立，只要求$|x+y|<1$即可．但从(1)式到(2)式，必需要求(1)式绝对收敛，这样才能将各项重新排列．不难看出(1)式级数各项取绝对值后即函数 $-\ln[1-(|x|+|y|)]$ 的展开式，它的收敛性要求$|x|+|y|<1$．这就是 $f(x,y)$ 的展

开式的收敛区域。

3595. $f(x,y)=e^x\sin y$.

解 $$f(x,y)=\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n+1}}{m!(2n+1)!}$$

$$(|x|<+\infty,\quad |y|<+\infty).$$

3596. $f(x,y)=e^x\cos y$.

解 $$f(x,y)=\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n}}{m!(2n)!}$$

$$(|x|<+\infty,\quad |y|<+\infty).$$

3597. $f(x,y)=\sin x\,\mathrm{sh}\,y$.

解 $$\mathrm{sh}\,y=\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^n}{n!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(|y|<+\infty).$$

于是，

$$f(x,y)=\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right]$$

$$\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m}\frac{x^{2m+1}y^{2n+1}}{(2m+1)!(2n+1)!}$$

$$(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty).$$

3598. $f(x,y)=\cos x\,\mathrm{ch}\,y$.

解 $\mathrm{ch}\,y=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n)!}\quad(|y|<+\infty)$.

于是，

$$f(x,y)=\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m}\frac{x^{2m}y^{2n}}{(2m)!(2n)!}$$

$$(|x|<+\infty,|y|<+\infty).$$

3599. $f(x,y)=\sin(x^{2}+y^{2})$.

解 $f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(x^{2}+y^{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^{n}\frac{x^{2k}y^{2(2n+1-k)}}{k!(2n+1-k)!}$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\left(\sin\frac{n+m}{2}\pi\right)\frac{x^{2n}y^{2m}}{m!n!}\quad(x^{2}+y^{2}<+\infty).$$

3600. $f(x,y)=\ln(1+x)\ln(1+y)$.

解 $f(x,y)=\left[\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^{m}}{m}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{y^{n}}{n}\right]$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{x^{m}y^{n}}{mn}\quad(|x|<1,|y|<1).$$

3601. 写出函数

$$f(x,y)=\int_0^1(1+x)^{t^2y}dt$$

的马克劳林级数前面不为零的三项.

解 $(1+x)^{t^2y}=e^{t^2y\ln(1+x)}\approx 1+t^2y\ln(1+x)$

$$+\frac{1}{2!}[t^2y\ln(1+x)]^2$$

$$\approx 1+t^2y\left(x-\frac{x^2}{2}\right)=1+t^2xy-\frac{t^2}{2}x^2y.$$

于是,

$$f(x,y)\approx\int_0^1\left(1+t^2xy-\frac{t^2}{2}x^2y\right)dt$$

$$=1+\frac{1}{3}y\left(x-\frac{x^2}{2}\right).$$

3602. 按二项式 $x-1$ 和 $y+1$ 的正整数幂将函数 e^{x+y} 展开成幂级数.

解 $e^{x+y}=e^{(x-1)+(y+1)}=e^{x-1}\cdot e^{y+1}$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y+1)^n}{m!n!}$$

$$(|x|<+\infty,|y|<+\infty).$$

3603. 写出函数 $f(x,y)=\frac{x}{y}$ 在点 $M(1,1)$ 的邻域内的台劳级数展开式.

解 令 $x=1+h$, $y=1+k$, 则得

$$\frac{x}{y}=\frac{1+h}{1+k}=(1+h)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nk^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[1+(x-1)](y-1)^n$$

$$(|x|<+\infty,\ 0<y<2).$$

3604. 设 z 为由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所定义的 x 和 y 的隐函数，当 $x=1$ 和 $y=1$ 时它的值为 $z=1$.

写出函数 z 按二项式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂排列的展开式中的若干项.

解 对原方程微分一次，得

$$3z^2dz-2xdz-2zdx+dy=0. \qquad (1)$$

再微分一次，得

$$(3z^2-2x)d^2z+6zdz^2-4dxdz=0. \qquad (2)$$

以 $x=1$, $y=1$, $z=1$ 代入(1),(2)两式，得

$$dz=2dx-dy,$$

$$d^2z=(4dx-6dz)dz=(4dx-12dx+6dy)\cdot(2dx-dy)$$

$$=-16dx^2+20dxdy-6dy^2,$$

....

于是，可求得在 $x=1$，$y=1$ 处，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-16,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=10,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6;$$

....

从而有

$$z=1+2(x-1)-(y-1)-[8(x-1)^2$$

$-10(x-1)(y-1)+3(y-1)^2]+\cdots$

研究下列曲线的奇点的种类并大略地绘出这些曲线：

3605. $y^2=ax^2+x^3$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=ax^2+x^3-y^2=0, \\ F'_x(x,y)=2ax+3x^2=0, \\ F'_y(x,y)=-2y=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点(0，0)为奇点。

其次，由于

$A=F''_{xx}(0,0)=2a, B=F''_{xy}(0,0)=0,$

$C=F''_{yy}(0,0)=-2$，$AC-B^2=-4a$,

故当 $a>0$ 时，点(0，0)为二重点；当 $a<0$ 时，点(0,0)为孤立点；当 $a=0$ 时，原方程化为 $y^2=x^3$，由3574(6)的讨论知点(0,0)为尖点.

如图6·35所示，点 A_1 为($-a$，0)。

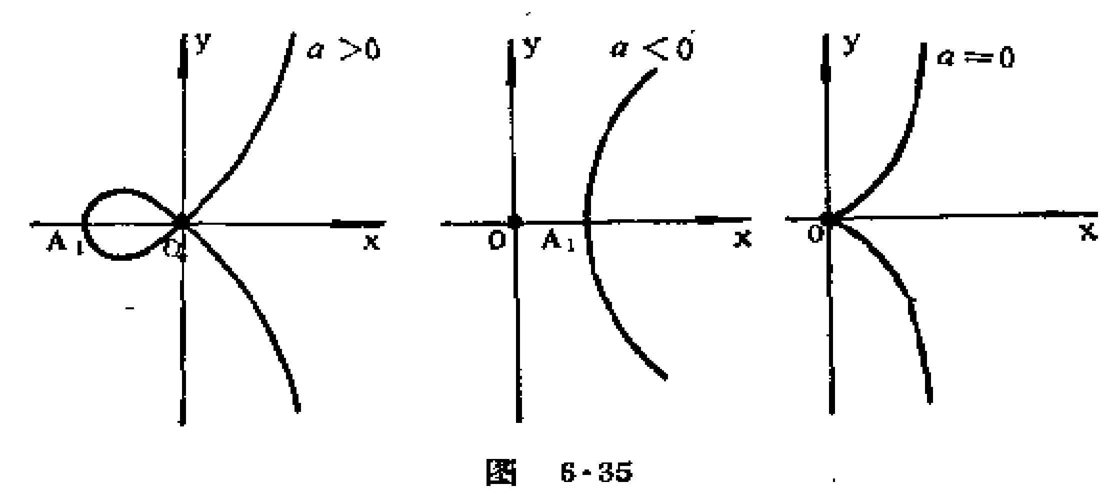


图 6·35

3606. $x^3+y^3-3xy=0$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0,\\F'_x(x,y)=3x^2-3y=0,\\F'_y(x,y)=3y^2-3x=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点$(0,0)$为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=0$，$B=F''_{xy}(0,0)=-3$，$C=F''_{yy}(0,0)=0$，且 $AC-B^2=-9<0$，故点$(0,0)$为二重点．图象参看 370 题(6)。

3607．$x^2+y^2=x^4+y^4$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=x^2+y^2-x^4-y^4=0,\\F'_x(x,y)=2x-4x^3=0,\\F'_y(x,y)=2y-4y^3=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点$(0,0)$为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=2$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2$，且 $AC-B^2=4>0$，故点$(0,0)$为孤立点．图象参看 1542 题。

3608．$x^2+y^4=x^6$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=x^2+y^4-x^6=0,\\F'_x(x,y)=2x-6x^5=0,\\F'_y(x,y)=4y^3=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点$(0,0)$为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=2$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=0$，且 $AC-B^2=0$，故点$(0,0)$为上升点或孤立点．本题中，点$(0,0)$为孤立点（图6·36）。事

实上，将原方程改写为 $y^4=x^6-x^2$，对(0，0)点的很小的邻域内的点($|x|<1$，$|y|<1$)，左端 $y^4\geqslant 0$，右端 $x^6-x^2=x^2(x^4-1)\leqslant 0$，除点(0,0)外没有适合方程的点，故点(0，0)为孤立点．

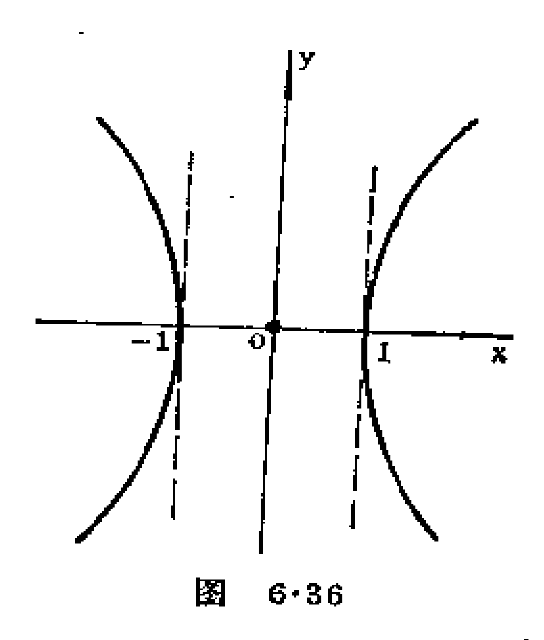


图 6·36

3609．$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$．

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0,\\F'_x(x,y)=4x(x^2+y^2)-2a^2x=0,\\F'_y(x,y)=4y(x^2+y^2)+2a^2y=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点(0,0)为奇点．

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=-2a^2$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2a^2$，且 $AC-B^2=-4a^4<0(a\neq0)$，故点(0,0)为二重点．图象参看 3367 题，只须将该题中的 1 换成 a．

3610．$(y-x^2)^2=x^5$．

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=(y-x^2)^2-x^5=0,\\F'_x(x,y)=-4x(y-x^2)-5x^4=0,\\F'_y(x,y)=2(y-x^2)=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点(0,0)为奇点．

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=0$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2$，且 $AC-B^2=0$，故对点(0，0)还需要再讨论一下．由原方程可解出 $y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}}$，右边只允许 $x\geqslant 0$，当 $0<x<1$ 时不论取"＋"号还是"－"号均有 $y>0$，且均有

$$\lim_{x\to+0}\frac{dy}{dx}=0,$$

故点 (0,0) 为尖点，如图 6·37所示．

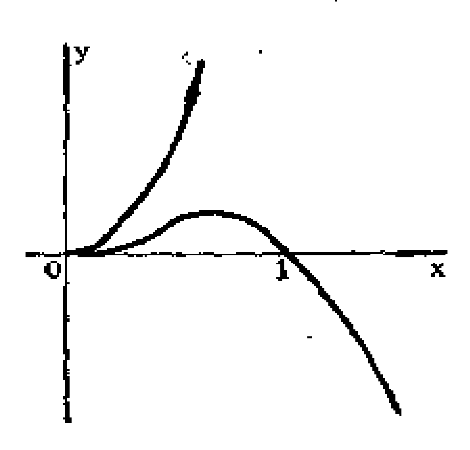


图 6·37



3611．$(a+x)y^2=(a-x)x^2$．

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=(a+x)y^2-(a-x)x^2=0, & (1)\\ F'_x(x,y)=y^2-2ax+3ax^2=0, & (2)\\ F'_y(x,y)=2(a+x)y=0. & (3)\end{cases}$$

由(3)得 $x=-a$ 或 $y=0$．

将 $y=0$ 代入(1)、(2)，得 $x=0$．

将 $x=-a$ 代入(1)式，得 $(a-x)x^2=0$．若 $a\neq 0$，则得出矛盾的结果．若 $a=0$，则也得到 $x=0$，$y=0$，故点(0,0)为奇点．

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=-2a$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2a$，且 $AC-B^2=-4a^2$，故当 $a\neq 0$ 时，点(0,0)为二重点；当 $a=0$ 时，方程转化为 $xy^2=-x^3$，从而曲线为 $x=0$，点(0,0)为上升点．

如图 6·38 所示，图中点 A_1 为$(a,0)$

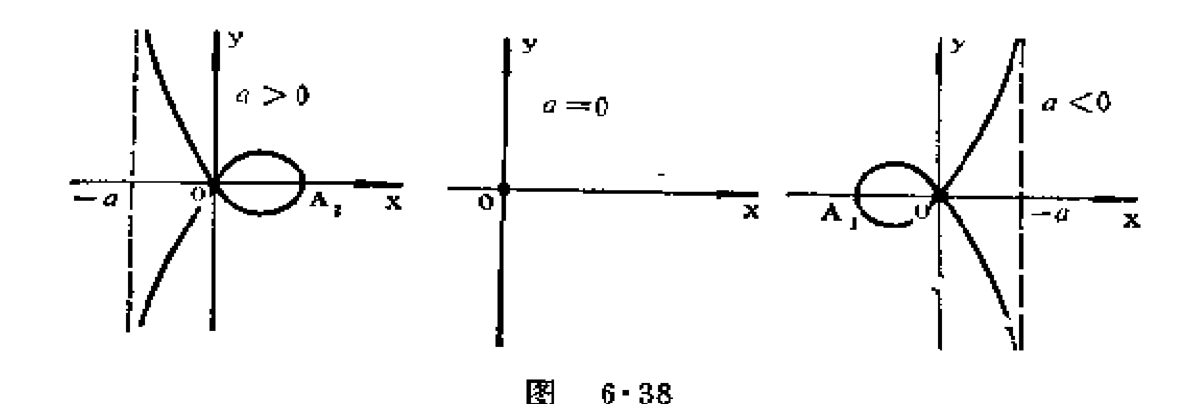


图 6·38

3612. 研究参变量 a,b,c $(a\leqslant b\leqslant c)$ 的值与曲线 $y^2=(x-a)\cdot(x-b)(x-c)$ 的形状之关系.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x,y)=y^2-(x-a)(x-b)(x-c)=0, & (1)\\ F'_x(x,y)=-(x-a)(x-b)-(x-a) & \\ \qquad\cdot(x-c)-(x-b)(x-c)=0, & (2)\\ F'_y(x,y)=2y=0. & (3)\end{cases}$$

由(3)得 $y=0$，代入(1)，联立(1)，(2)求解.

当 $a<b<c$ 时，(1)，(2)无解. 因此无奇点，此时曲线如图 6·39(1)所示；

当 $a=b<c$ 时，显然 (1)，(2)有解 $x=a, y=0$，由于 $A=F''_{xx}(a,0)=-2(a-c)$，$B=F''_{xy}(a,0)=0$，$C=F''_{yy}(a,0)=2$，且 $AC-B^2=-4(a-c)>0$，故点 $A_1(a,0)$ 为弧立点，如图 6·39 (2)所示；

当 $a<b=c$ 时，显然(1)，(2)有解 $x=b$，$y=0$. 由于 $A=F''_{xx}(b,0)=-2(c-a)$，$B=F''_{xy}(b,0)=0$，$C=F''_{yy}(b,0)=2$，且 $AC-B^2=-4(c-a)<0$，故点 $A_2(b,0)$ 为二重点，如图 6·39(3)所示；

当 $a=b=c$ 时，显然有解 $x=a$，$y=0$。由于 $AC-B^2=0$，此时原方程为 $y^2=(x-a)^3$，且由3574题(6)的结果知，点 $A_1(a,0)$ 为尖点，如图6·39（4）所示。

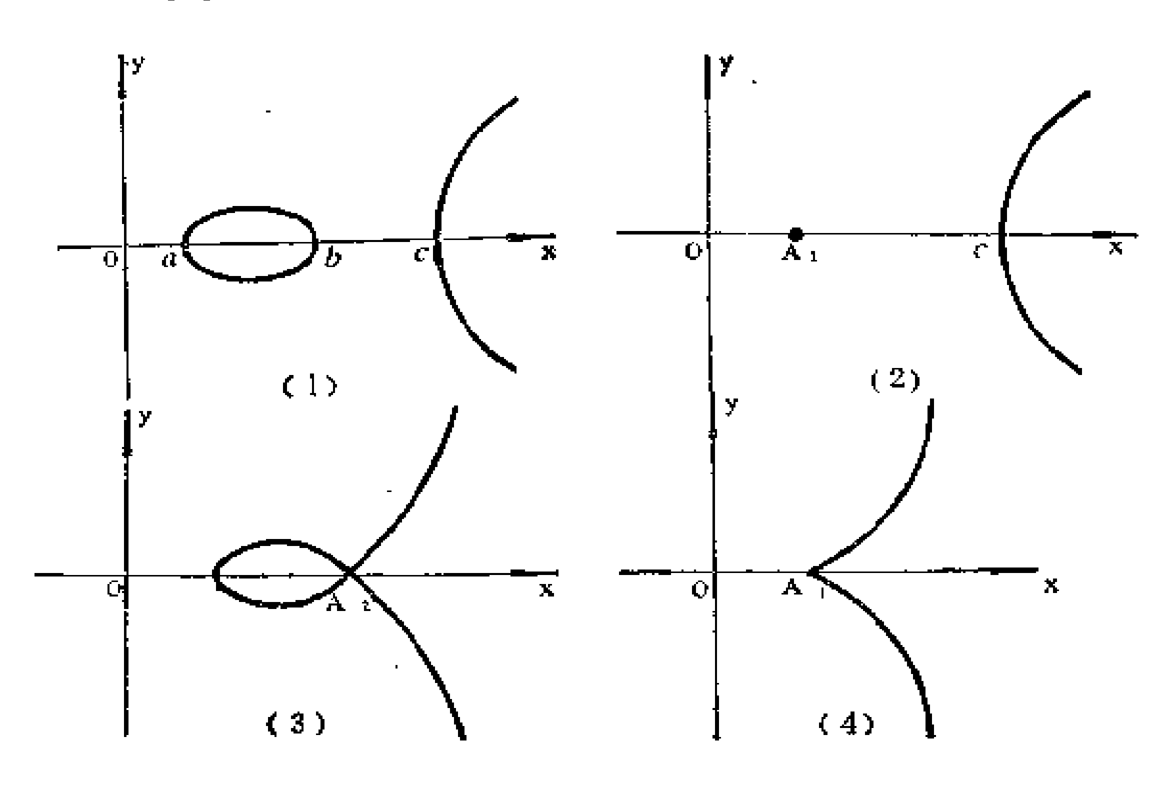


图 6·39

研究超越曲线的奇点：

3613. $y^2=1-e^{-x^2}$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x,y)=y^2-1+e^{-x^2}=0, \\ F'_x(x,y)=-2xe^{-x^2}=0, \\ F'_y(x,y)=2y=0 \end{cases}$$

得 $x=0,y=0$，故点 $(0,0)$ 为奇点。

又 $A=F''_{xx}(0,0)=-2$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2$，且 $AC-B^2=-4<0$，故点(0，0)为二重点．

3614．$y^2=1-e^{-x^3}$．

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=y^2-1+e^{-x^3}=0,\\ F'_x(x,y)=-3x^2e^{-x^3}=0,\\ F'_y(x,y)=2y=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点(0,0)为奇点。

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=0$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2$，且 $AC-B^2=0$，故对点(0，0)还需再讨论一下。原式可解为 $x=-\sqrt[3]{\ln(1-y^2)}>0$，在(0，0)附近，第一及第四象限各有原曲线的一支，因此，点(0,0)为尖点。

3615．$y=x\ln x$．

解 $F(x,y)=x\ln x-y$，$F'_x(x,y)=1+\ln x$，$F'_y(x,y)=-1\neq 0$，故无奇点。如图6·40所示。

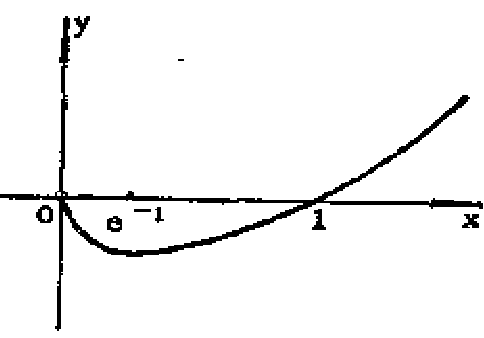
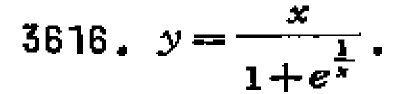


图 6·40

3616． $y=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$．

解 在 $x=0$ 处，由于

$$\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to-0}y=0,$$

故 $x=0$ 为"可移去"的第一类不连续点，补充函数在该点的值为零后，即得知函数

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 连续．由于$F'_y(x,y)=1\neq 0$，故无奇点．当 $x\neq 0$ 时，由于，

$$y'=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2},$$

$$\lim_{x\to+0}y'=\lim_{z\to+\infty}\frac{(1+z)e^z+1}{(1+e^z)^2}=\lim_{z\to+\infty}\frac{e^z(z+2)}{2e^z(1+e^z)}$$

$$=\lim_{z\to+\infty}\frac{z+2}{2(1+e^z)}=0,$$

$$\lim_{x\to-0}y'$$

$$=\lim_{z\to+\infty}\frac{(1-z)e^{-z}+1}{(1+e^{-z})^2}=1,$$

故点 (0,0) 为角点，如图 6·41所示

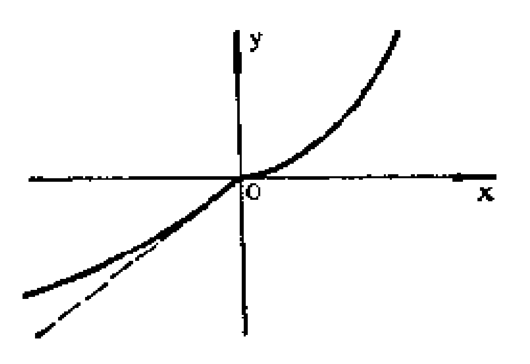


图 6·41

3617．$y=\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$.

解 $x=k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$点为不连续点．由于

$$\lim_{x\to k\pi+0}y=(-1)^k\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to k\pi-0}y=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2},$$

故点 $x=k\pi$ 为函数的第一类不连续点．

3618．$y^2=\sin\frac{\pi}{x}$.

解 $y=\pm\sqrt{\sin\frac{\pi}{x}}$，它在$\left(\frac{1}{2k},\ \frac{1}{2k-1}\right)$ $(k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$内无定义.

在边界点$x=\frac{1}{2k}$及$x=\frac{1}{2k-1}$，$y=0$.

函数图象有上下两支.

设$F(x,y)=y^2-\sin\frac{\pi}{x}$,则在边界点，由于$F'_x\neq 0$，$F'_y=0$，故也无奇点.

在(0,0)点的任何邻域内，有无穷多个曲线的封闭分支，这些分支没有一个过(0,0)点，它不属于任何一种类型.

3619. $y^2=\sin x^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=y^2-\sin x^2=0,\\ F'_x(x,y)=-2x\cos x^2=0,\\ F'_y(x,y)=2y=0\end{cases}$$

得$x=0$，$y=0$，故点(0,0)为奇点.

又因$A=F''_{xx}(0,0)=-2$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2$，且$AC-B^2=-4<0$,故点(0,0)为二重点.

3620. $y^2=\sin^3 x$.

解 显见，函数y的周期为2π，在$(2k\pi,\ (2k+1)\pi)$内函数有定义，而在$((2k-1)\pi,\ 2k\pi)$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$内无定义.

解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=y^2-\sin^3x=0,\\F'_x(x,y)=-3\sin^2x\cos x=0,\\F'_y(x,y)=2y=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点 (0,0) 为奇点。

在点 (0,0) 的左侧（指充分小的范围，下同，不再说明）无曲线的点，而在右侧的第一、第四象限分别有曲线的两枝，因此，点(0,0)为尖点，如图6·42所示。

由周期性可知，点$(k\pi,0)$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$也为尖点。只是当 k 是偶数时，右侧才有曲线的两枝；当 k 是奇数时，左侧才有曲线的两枝。

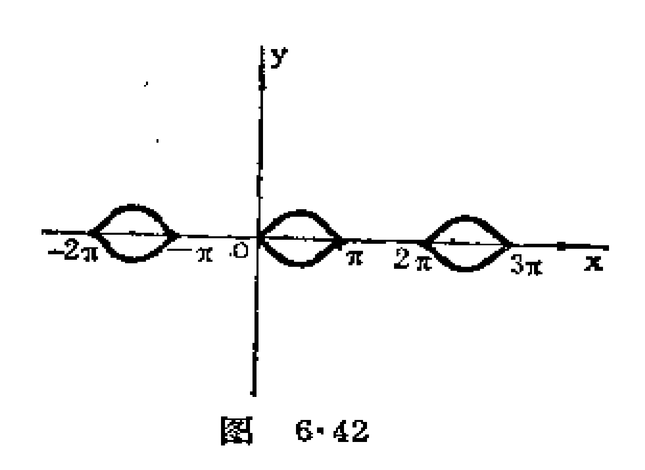


图 6·42

§7. 多变量函数的极值

1° 极值的定义　若函数 $f(P)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 于点 P_0 的邻域内有定义并且当 $0<\rho(P_0,P)<\delta$ 时，$f(P_0)>f(P)$ 或 $f(P_0)<f(P)$，则说，函数 $f(P)$ 在点 P_0 有极值（相应地为极大值或极小值）.*)

2° 极值的必要条件　可微分的函数 $f(P)$ 仅在静止点 P_0，即是说在 $df(P_0)=0$ 的点 P_0 能达到极值. 所以，函数 $f(P)$ 的极值点应当满足方程组 $f'_{x_i}(x_1,\cdots,x_n)=0\ (i=1,\cdots,n)$.

3° 极值的充分条件　函数 $f(P)$ 于点 P_0 有：

(a) 极大值，若 $df(P_0)=0$，$d^2f(P_0)<0$，

(б) 极小值，若 $df(P_0)=0$，$d^2f(P_0)>0$.

研究二次微分 $d^2f(P_0)$ 的符号可用化相应的二次式成典式的方法来进行.

特别是，对于两个自变量 x 和 y 的函数 $f(x,y)$ 在静止点 (x_0,y_0) 〔$df(x_0,y_0)=0$〕，$D=AC-B^2\neq 0$〔其中 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$〕成立时，有：

（1）极小值，若 $D>0$，$A>0\ (C>0)$；

（2）极大值，若 $D>0$，$A<0\ (C<0)$；

（3）极值不存在，若 $D<0$.

4° 条件极值　在关系式 $\varphi_i(P)=0\ (i=1,\cdots,m;\ m<n)$

---

*) 编者注：若将不等式 $f(P_0)>f(P)$（或 $f(P_0)<f(P)$）换为不等式 $f(P_0)\geqslant f(P)$（或 $f(P_0)\leqslant f(P)$），则称 $f(P)$ 在点 P_0 有弱极大值（或弱极小值）.

存在的条件下，求函数$f(P_0)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的极值的问题，可归结为对于拉格朗日函数

$$L(P)=f(P)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(P)$$

〔其中$\lambda_i(i=1, \cdots, m)$为常数因子〕求普通极值的问题.关于条件极值的存在和性质的问题，在最简单的情况，根据研究函数$L(P)$于静止点P_0的二次微分$d^2L(P_0)$的符号，并在变量dx_1，$dx_2, \cdots, dx_n$由下面的关系式

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j=0\quad(i=1, \cdots, m)$$

所限制的条件下，得到解决.

5° 绝对极值 于有界且封闭的区域内可微分的函数$f(P)$在此域内或于静止点，或于域的边界点达到自己的最大值和最小值.

研究下列多变量函数的极值：

3621. $z=x^2+(y-1)^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2(y-1)=0\end{cases}$$

得静止点$P_0(0, 1)$. 显然$z(0, 1)=0$，且当$(x, y)\neq(0, 1)$时$z>0$，故函数z在点P_0取得极小值$z(P_0)=0$（实际是最小值）.

3622. $z=x^2-(y-1)^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=2x=0, \\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2(y-1)=0 \end{cases}$$

得静止点$P_0(0,1)$．由于

$A=z''_{xx}(0,1)=2$，$B=z''_{xy}(0,1)=0$，$C=z''_{yy}(0,1)=-2$，且$AC-B^2=-4<0$，故极值不存在(或用该点附近的z值可正可负说明)。

3623. $z=(x-y+1)^2$。

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=2(x-y+1)=0, \\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2(x-y+1)=0 \end{cases}$$

得静止点分布在直线$x-y+1=0$上．对于此直线上的点均有$z=0$，但是$z\geqslant 0$恒成立．因此，函数z在直线$x-y+1=0$上的各点取得弱极小值$z=0$。

3624. $z=x^2-xy+y^2-2x+y$。

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=2x-y-2=0, \\ \frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y+1=0 \end{cases}$$

得静止点$P_0(1,0)$．由于

$A=z''_{xx}(1,0)=2$，$B=z''_{xy}(1,0)=-1$，$C=z''_{yy}(1,0)=2$，且$AC-B^2=3>0$，故函数z在点

P_0取得极小值$z(P_0)=-1$.

3625. $z=x^2y^3(6-x-y)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=xy^3(12-3x-2y)=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2y^2(18-3x-4y)=0 \end{cases}$$

得静止点$P_0(2,3)$，并且直线$x=0$及直线$y=0$上的点都是静止点.

不难断定在P_0点，$A=-162$，$B=-108$，$C=-144$，$AC-B^2>0$，故函数z在点P_0取得极大值$z(P_0)=108$.

在直线$x=0$及$y=0$上的各点均有$z=0$. 先分析直线$y=0$的情况. 在直线上$x\neq 0$及$x\neq 6$处，$x^2(6-x-y)\neq 0$，在确定点的足够小的邻域内也不变号，但是y^3可正可负，因此函数z变号，即在上述情况下没有极值. 当$x=0$及$x=6$类似地可判断也无极值.

其次分析直线$x=0$的情况. 在直线上$y=0$及$y=6$的点的情况类似地可判断无极值. 但当$0<y<6$时，$y^3(6-x-y)>0$，且在所讨论点的足够小的邻域内保持正号. 因此，在足够小的邻域内，$z=x^2y^3\cdot(6-x-y)\geqslant 0$也成立，但邻域内任意近处总有$z=0$的点. 于是，对于$x=0$，$0<y<6$的点函数$z$取得弱极小值$z=0$. 同法可判定，对于直线$x=0$上$y<0$及$y>6$的各点处，函数$z$取得弱极大值$z=0$.

3626. $z=x^3+y^3-3xy$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases}$$

得静止点$P_0(0,0)$及$P_1(1,1)$。

不难断定，在点P_0有 $A=0$，$B=-3$，$C=0$及$AC-B^2=-9<0$，故无极值；而在点P_1有 $A=6$，$B=-3$，$C=6$及$AC-B^2=27>0$，故函数z在该点取得极小值$z(P_1)=-1$。

3627. $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$。

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2x-2y=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2x-2y=0\end{cases}$$

得静止点$P_0(0,0)$，$P_1(1,1)$及$P_2(-1,1)$。

在点P_0附近，当$x=y$且足够小时，有$z=2x^4-4x^2<0$；但当$x=-y$时，$z=2x^4>0$，因此，在点P_0无极值。

不难断定，在点P_1及P_2均有$A=10$，$B=-2$，$C=10$及$AC-B^2=96>0$，故函数z在点P_1及P_2取得极小值$z=-2$。

3628. $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$ $(x>0,\ y>0)$。

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y - \dfrac{50}{x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x - \dfrac{50}{y^2} = 0 \end{cases}$$

得静止点$P_0(5,\ 2)$．不难断定，在该点有$A=\frac{4}{5}$，$B=1$，$C=5$及$AC-B^2=3>0$，故函数z在该点取得极小值$z(P_0)=30$．

3629．$z=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ $(a>0,\ b>0)$．

解 考虑函数$u=z^2=x^2y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$．

显然z的极值均为u的极值；且u在点(x,y)取得的极值不为零时，z也在点$(x,\ y)$取得极值；u在点$(x,\ y)$取得的极值为零时，情况复杂一些，但对z也不难讨论．

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)-\dfrac{2}{a^2}x^3y^2=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x^2y\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)-\dfrac{2}{b^2}x^2y^3=0 \end{cases}$$

得静止点$P_0(0,0)$，$P_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$，$P_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\ -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$，$P_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$及$P_4\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$．

由于 z 在点P_0 附近变号，所以 $z(P_0)$不是极值。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y^2\left(1-\frac{6x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{6y^2}{b^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xy\left(1-\frac{2x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{b^2}\right).$$

在P_1, P_2, P_3, P_4各点，得

$$A=-\frac{8}{9}b^2,\ B=\pm\frac{4}{9}ab,\ C=-\frac{8}{9}a^2,$$

$$AC-B^2=\left(\frac{64}{81}-\frac{16}{81}\right)a^2b^2>0,$$

故函数 u 取得正的极大值．于是，相应地函数 z 在点 P_1及P_2取得极大值$z(P_1)=z(P_2)=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$，而在点 P_3及P_4 取得极小值 $z(P_3)=z(P_4)=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$.

3630. $z=\frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\quad(a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

解 令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则

$$z(x,y)=z(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)=\frac{ar\cos\varphi+br\sin\varphi+c}{\sqrt{r^2+1}}.$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{a\cos\varphi+b\sin\varphi-cr}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}=0, & (1)\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial\varphi}=\dfrac{-ar\sin\varphi+br\cos\varphi}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}=0. & (2)\end{cases}$$

先设 a, b 不同时为零．由（2）考虑到 $r=0$ 不是解（$r=0$，φ 为任意值不满足（1）式），故有 $a\sin\varphi=b\cos\varphi$．于是，

$$\cos\varphi=\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi=\frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (3)$$

显见当 $c=0$ 时无解（因由（1）有 $a\cos\varphi+b\sin\varphi=0$，再由（3）得 $a=b=0$．与 a,b 不同时为零之假定矛盾）．当 $c\neq 0$ 时，

$$r=\frac{a\cos\varphi+b\sin\varphi}{c}=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

为保证 $r>0$，在 $\cos\varphi$ 及 $\sin\varphi$ 前取与 c 一致的符号．此时，有

$$x=\frac{a}{c},\quad y=\frac{b}{c}.$$

由于这时 $z''_{rr}=-\dfrac{c(1+3r^2)}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}}$，

$$z''_{\varphi\varphi}=-\frac{cr^2}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}},\quad z''_{r\varphi}=0$$

及 $z''_{rr}z''_{\varphi\varphi}-(z''_{r\varphi})^2>0$，故当 $c>0$ 时 $z''_{rr}<0$，函数 z 在点 $\left(\dfrac{a}{c},\ \dfrac{b}{c}\right)$ 取得极大值 $z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；当 $c<0$ 时 $z''_{rr}>0$，函数 z 在点 $\left(\dfrac{a}{c},\ \dfrac{b}{c}\right)$ 取得极小值 $z=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$．

下设 $a=b=0$．由假定 $a^2+b^2+c^2\neq 0$ 知 $c\neq 0$．

此时解方程组（1），（2）得 $r=0$，φ 任意；即 $x=0$，$y=0$．由于这时 $z=\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$，故显然知：当 $c>0$ 时 z 在点(0,0)取极大值 $z=c$；当 $c<0$时，z在点（0,0）取极小值 $z=c$。

综合上述结果，得结论：若 $c>0$，则 z 在点 $\left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right)$取极大值 $z_{极大}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；若 $c<0$，则 z 在点$\left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right)$取极小值 $z_{极小}=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；若 $c=0$（由假定，这时 $a^2+b^2\neq 0$），则 z 无极值。

注．此题也可不作变量代换$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$,（极坐标），而直接在直角坐标 x,y 下进行讨论，即解方程组$\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$并计算$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$之值。但此法计算较繁，没有用极坐标简单。

3631．$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

点（0,0）为偏导函数无意义的点．当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$z<1$，故 $z(0,0)=1$ 为极大值．

3632．$z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$。

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+8x-3y)=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=3e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2-2x+2y)=0 \end{cases}$$

得静止点$P_0(0,0)$及$P_1\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+16x-6y+4),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=9e^{2x+3y}\left(8x^2-6xy+3y^2-4x+4y+\frac{2}{3}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+6x-y-1).$$

在点P_0，$A=16$，$B=-6$，$C=6$及$AC-B^2=60>0$，故函数z取得极小值$z(P_0)=0$；在点P_1，$A=14e^{-2}$，$B=-9e^{-2}$，$C=\frac{3}{2}e^{-2}$及$AC-B=-60e^{-4}<0$，故无极值.

3633. $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2e^{x^2-y}(5x-2x^2+xy-1)=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2-y}(2x-y-4)=0 \end{cases}$$

得静止点$P_0(1,-2)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2e^{x^2-y}(10x^2-4x^3+2x^2y-6x+y+5),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{x^2-y}(3-2x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2e^{x^2-y}(2x^2-xy-4x+1),$$

在点P_0，$A=-2e^3$，$B=2e^3$，$C=-e^3$及$AC-B^2=-2e^6<0$，故无极值。

3634. $z=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=5e^{-(x^2+xy+y^2)}-(5x+7y-25)\\ \quad\cdot(2x+y)e^{-(x^2+xy+y^2)}=0, \quad (1)\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=7e^{-(x^2+xy+y^2)}-(5x+7y-25)\\ \quad\cdot(x+2y)e^{-(x^2+xy+y^2)}=0. \quad (2)\end{cases}$$

(1)×7−(2)×5，消去因子$e^{-(x^2+xy+y^2)}$，得

$$3(5x+7y-25)(3x-y)=0.$$

以$5x+7y-25=0$代入(1)、(2)，显然矛盾，故必有$5x+7y-25\neq0$，从而$y=3x$. 代入(1)，得

$$26x^2-25x-1=0,$$

解得静止点$P_0(1,3)$及$P_1\left(-\frac{1}{26},-\frac{3}{26}\right)$. 在点$P_0$，

$$\begin{aligned}A&=z''_{xx}(P_0)=[z'_x(x,3)]'_x\big|_{x=1}\\&=\{e^{-(x^2+3x+9)}[5-(5x-4)(2x+3)]\}'_x\big|_{x=1}\\&=[e^{-(x^2+3x+9)}]'\big|_{x=1}\cdot[5-(5x-4)(2x+3)]\big|_{x=1}\\&\quad+[e^{-(x^2+3x+9)}]\big|_{x=1}\cdot[5-(5x-4)\\&\quad\cdot(2x+3)]'\big|_{x=1}\\&=-27e^{-13}.\end{aligned}$$

同法可求得

$$B=z''_{xy}(P_0)=-36e^{-13},C=z''_{yy}(P_0)=-51e^{-13}.$$

于是，$AC-B^2=81e^{-26}>0$，故函数 z 在点P_0取得极大值$z(P_0)=e^{-13}\approx 2.26\cdot 10^{-6}$。

同法可得函数z 在点P_1取得极小值$z(P_1)=-26e^{-\frac{1}{52}}\approx -25.51$.

3635. $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+y-\dfrac{4}{x}=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x+2y-\dfrac{10}{y}=0 \end{cases} \quad (x>0, y>0)$$

得静止点$P_0(1,2)$. 在点P_0,

$$A=6, \ B=1, \ C=\frac{9}{2}, \ AC-B^2=26>0,$$

故函数 z 在点 P_0取得极小值 $z(P_0)=7-10\ln 2\approx 0.0685$.

3636. $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos x-\sin(x-y)=0, & (1) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\sin y+\sin(x-y)=0. & (2) \end{cases}$$

(1)+(2)，$\cos x=\sin y$. 由于 x,y 均为锐角，故有

$y=\frac{\pi}{2}-x$. 代入（1），得

$$\cos x-\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x+\cos 2x$$

$$=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}=0.$$

但是$\cos\frac{x}{2}\neq 0$，故$\cos\frac{3x}{2}=0$. 从而得静止点$P_0\left(\frac{\pi}{3},\right.$

$\left.\frac{\pi}{6}\right)$. 由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x-\cos(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\cos y-\cos(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(x-y),$$

故在点P_0，有

$$A=-\frac{1+\sqrt{3}}{2},\quad B=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad C=-\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

$$AC-B^2=\frac{1+2\sqrt{3}}{4}>0.$$

于是，函数z在点P_0取得极大值$z(P_0)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

3637. $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$ （$0\leqslant x\leqslant\pi$; $0\leqslant y\leqslant\pi$）.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \sin y \sin(2x+y) = 0, & (1) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \sin x \sin(x+2y) = 0. & (2) \end{cases}$$

由（1）及（2）可得下列四个方程组：

$$\text{I}: \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin y = 0. \end{cases} \qquad \text{II}: \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin(2x+y) = 0. \end{cases}$$

$$\text{III}: \begin{cases} \sin y = 0, \\ \sin(x+2y) = 0. \end{cases} \qquad \text{IV}: \begin{cases} \sin(2x+y) = 0, \\ \sin(x+2y) = 0. \end{cases}$$

考虑到$0 \leqslant x \leqslant \pi$，$0 \leqslant y \leqslant \pi$，于是得原方程组（1）与（2）的六个解

$$P_1(0, 0), P_2(0, \pi), P_3(\pi, 0),$$

$$P_4(\pi, \pi), P_5\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), P_6\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

由于所考虑的区域是闭正方形$0 \leqslant x \leqslant \pi$，$0 \leqslant y \leqslant \pi$，故点$P_1$，$P_2$，$P_3$，$P_4$都是此区域的边界点.因此$P_1$，$P_2$，$P_3$，$P_4$不是函数$z$达极值的点（根据极值的定义，首先要求函数在所考虑的点的某邻域中有定义）.由于

$$z''_{xx} = 2\sin y\cos(2x+y), \quad z''_{xy} = \sin 2(x+y),$$
$$z''_{yy} = 2\sin x\cos(x+2y).$$

在点P_5有$AC - B^2 = (-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 0$且$A = -\sqrt{3} < 0$，故函数$z$在点$P_5$取得极大值$z(P_5) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$；在点$P_6$有$AC - B^2 = (\sqrt{3})(\sqrt{3})$

$-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2>0$ 且 $A=\sqrt{3}>0$，故函数 z 在点 P_6 取

得极小值 $z(P_6)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

3638. $z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=1+\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{3y}{x^2+y^2}=0, \\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2+\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{3x}{x^2+y^2}=0\end{cases}$$

得静止点 $P_0(1,1)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-x^2+6xy+y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-6xy-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-3x^2-2xy+3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

在点 P_0 有 $A=\frac{3}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$，$C=-\frac{3}{2}$ 及 $AC-B^2=$

$-\frac{5}{2}<0$，故无极值.

3639. $z=xy\ln(x^2+y^2)$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=y\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2y}{x^2+y^2}=0, & (1)\\ \frac{\partial z}{\partial y}=x\ln(x^2+y^2)+\frac{2xy^2}{x^2+y^2}=0. & (2)\end{cases}$$

将（1）式乘以 x 减去（2）式乘以 y，得

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}(x^2-y^2)=0.$$

于是，$x=0$，$y=0$，$x=y$，$x=-y$ 为四组解，对应地得静止点 $P_1(0,1)$，$P_2(0,-1)$，$P_3(1,0)$

$P_4(-1,0)$，$P_5\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\ \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$，$P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$，

$P_7\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\ -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ 及 $P_8\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\ \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$.

代入原式，不难看出，函数 z 在点 P_1、P_2、P_3 及 P_4 均无极值（邻域内函数值可正可负）．由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2xy(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\ln(x^2+y^2)+\frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

在点 P_5 及 P_6，$A=2$，$B=0$，$C=2$ 及 $AC-B^2=4>0$，故函数 z 在点 P_5 及 P_6 取得极小值 $z(P_5)=z(P_6)=-\frac{1}{2e}\approx-0.184$.

在点 P_7 及 P_8，$A=-2$，$B=0$，$C=-2$ 及 $AC-B^2=4>0$，故函数 z 在点 P_7 及 P_8 取极大值 $z(P_7)=z(P_8)=\frac{1}{2e}\approx0.184$.

3640. $z=x+y+4\sin x\sin y$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=1+4\cos x\sin y=0, & (1) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=1+4\sin x\cos y=0. & (2) \end{cases}$$

(2)−(1)得 $\sin(x-y)=0$，故 $x-y=n\pi$；

(2)+(1)得 $\sin(x+y)=\frac{1}{2}$，故 $x+y=m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{6}$.

于是，得静止点 $P_0(x_0, y_0)$，其中

$$\begin{cases} x_0=(-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{12}+(m+n)\dfrac{\pi}{2}, \\ y_0=(-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{12}+(m-n)\dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (m, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

在点 P_0，有

$$\begin{aligned} AC-B^2 &= (-4\sin x_0\sin y_0)(-4\sin x_0\sin y_0) - (4\cos x_0\cos y_0)^2 \\ &= 16(\sin x_0\sin y_0-\cos x_0\cos y_0) \cdot (\sin x_0\sin y_0+\cos x_0\cos y_0) \\ &= -16\cos(x_0+y_0)\cos(x_0-y_0) \\ &= -16\cos\left[m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{6}\right]\cos n\pi \\ &= -16(-1)^{m+n}\cos\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

当 m 及 n 有相同的奇偶性时，$m+n$ 为偶数，$AC-B^2<0$，故无极值，当 m 及 n 有不同的奇偶性时，$m+n$

为奇数，$AC-B^2>0$，故有极值，看 A 的符号决定取得极大值还是极小值．由于

$$A=-4\sin x_0\sin y_0=2[\cos(x_0+y_0)-\cos(x_0-y_0)]$$

$$=2\{(-1)^m\cos\frac{\pi}{6}-(-1)^n\},$$

故当 m 为奇数及 n 为偶数时，$A<0$，取得极大值；当 m 为偶数及 n 为奇数时，$A>0$，取得极小值．极值为

$$z(x_0,y_0)=m\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1}+2\cdot(-1)^n.$$

3641．$z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$．

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2)=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2ye^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2)=0\end{cases}$$

得静止点 $P_0(0,0)$ 及 $P(x_0,y_0)$，其中 $x_0^2+y_0^2=1$．

在点 P_0 有 $z=0$，而当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时 $z>0$，故函数 z 在点 P_0 取得极小值 $z=0$．

由1437题知，在满足 $x_0^2+y_0^2=1$ 的点 (x_0,y_0) 的邻域内，不论是 $x^2+y^2>1$ 还是 $x^2+y^2<1$，均有

$$z(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}<e^{-1}.$$

但是点 (x_0,y_0) 的邻域内总有 $x^2+y^2=1$ 的点 (x,y)，因此，函数 z 在点 (x_0,y_0) 取得弱极大值 $z=e^{-1}$．

3642．$u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$．

解 $du=2(x+1)dx+2(y+2)dy+2(z-3)dz$．

令$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x+1)=0$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2(y+2)=0$，

$\frac{\partial u}{\partial z}=2(z-3)=0$，得静止点$P_0(-1,-2,3)$.

在该点由于

$$d^2u=2(dx^2+dy^2+dz^2)>0$$
$$(\text{当 } dx^2+dy^2+dz^2\neq 0 \text{ 时})，$$

故函数 u 在点 P_0取得极小值 $u(P_0)=-14$.

3643. $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

解 $du=(3x^2+12y)dx+(2y+12x)dy+(2z+2)dz$.

令$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12y=0$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2y+12x=0$，

$\frac{\partial u}{\partial z}=2z+2=0$，得静止点 $P_0(0,0,-1)$ 及 $P_1(24,-144,-1)$.

$$d^2u=6xdx^2+2dy^2+2dz^2+24dxdy.$$

在点P_0，有

$$d^2u=2dy^2+2dz^2+24dxdy=2dz^2+2dy(dy+12dx),$$

当 $dz=0$，$dy>0$ 及 $dy+12dx<0$ 时，$d^2u<0$；而当 dx、dy 及 dz 均大于零时，$d^2u>0$.因此 d^2u 的符号不定，故无极值.

在点 P_1，有

$$d^2u=144dx^2+2dy^2+2dz^2+24dxdy$$
$$=(12dx+dy)^2+dy^2+2dz^2$$
$$>0\ (\text{当 } dx^2+dy^2+dz^2\neq 0 \text{ 时})，$$

故函数 u 在点 P_1 取得极小值 $u(P_1)=-6913$.

3644. $u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$ ($x>0$, $y>0$, $z>0$).

解 $du=\left(1-\frac{y^2}{4x^2}\right)dx+\left(\frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}\right)dy$

$$+\left(\frac{2z}{y}-\frac{2}{z^2}\right)dz.$$

令 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$，得方程组

$$\begin{cases} 1-\frac{y^2}{4x^2}=0, \\ \frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}=0, \\ \frac{2z}{y}-\frac{2}{z^2}=0. \end{cases}$$

解之得静止点 $P_0\left(\frac{1}{2},1,1\right)$.

$$d^2u=\frac{y^2}{2x^3}dx^2-\frac{y}{x^2}dx\,dy+\left(\frac{1}{2x}+\frac{2z^2}{y^3}\right)dy^2$$

$$-\frac{4z}{y^2}dy\,dz+\left(\frac{2}{y}+\frac{4}{z^3}\right)dz^2.$$

在点 P_0，有

$$d^2u=4dx^2-4dxdy+3dy^2-4dydz+6dz^2$$
$$=(2dx-dy)^2+dy^2+(dy-2dz)^2+2dz^2>0$$

(当 $dx^2+dy^2+dz^2\neq 0$ 时),

故函数 u 在点 P_0 取得极小值 $u(P_0)=4$.

3645. $u=xy^2z^3(a-x-2y-3z)$ $(a>0)$.

解 $du=y^2z^3(a-2x-2y-3z)dx+2xyz^3(a-x-3y-3z)dy+3xy^2z^2(a-x-2y-4z)dz$.

令 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$，得方程组

$$\begin{cases} y^2z^3(a-2x-2y-3z)=0 \\ 2xyz^3(a-x-3y-3z)=0, \\ 3xy^2z^2(a-x-2y-4z)=0. \end{cases}$$

解之得静止点 $P_0\left(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}\right)$；直线 $x=0$，$2y+3z=a$；平面 $y=0$；平面 $z=0$.

同 3625 题的方法，不难确定：直线 $x=0$，$2y+3z=a$ 及平面 $z=0$上的点不取得极值. $y=0$ 时，当 $xz^3(a-x-3z)>0$ 取得弱极小值 $u=0$；当 $xz^3(a-x-3z)<0$ 取得弱极大值 $u=0$；当 $xz^3(a-x-3z)=0$ 不取得极值.

在点P_0，有

$$d^2u=-\frac{2a^5}{7^5}(dx^2+3dy^2+6dz^2+2dxdy+6dydz+3dxdz)=-\frac{a^5}{7^5}[(dx+2dy+3dz)^2+dx^2+2dy^2+3dz^2]<0 \quad (\text{当 } dx^2+dy^2+dz^2\neq 0 \text{ 时}),$$

故函数 u 在点P_0取得极大值$u(P_0)=\frac{a^7}{7^7}$.

3646. $u=\frac{a^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{b}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0,\ b>0)$.

解 $du=\left(\frac{2x}{y}-\frac{a^2}{x^2}\right)dx+\left(\frac{2y}{z}-\frac{x^2}{y^2}\right)dy$

$+\left(\frac{2z}{b}-\frac{y^2}{z^2}\right)dz$.

令$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$，得方程组

$$\begin{cases}\frac{2x}{y}-\frac{a^2}{x^2}=0,\\ \frac{2y}{z}-\frac{x^2}{y^2}=0,\\ \frac{2z}{b}-\frac{y^2}{z^2}=0.\end{cases}$$

解之得静止点 $P_0\left(\frac{1}{2}\sqrt[15]{16a^{14}b},\ \frac{1}{4}\sqrt[5]{16a^4b},\ \frac{1}{2}\sqrt[15]{\frac{1}{4}a^6b^7}\right)$.

$d^2u=\frac{2a^2}{x^3}dx^2+\frac{2}{y}dx^2-\frac{4x}{y^2}dx\,dy+\frac{2}{z}dy^2$

$+\frac{2x^2}{y^3}dy^2-\frac{4y}{z^2}dydz+\frac{2}{b}dz^2+\frac{2y^2}{z^3}dz^2$.

$=\frac{2a^2}{x^3}dx^2+\frac{2}{y}\left(dx-\frac{x}{y}dy\right)^2+\frac{2}{z}\left(dy-\frac{y}{z}dz\right)^2$

$+\frac{2}{b}dz^2$.

在点P_0，$x>0$，$y>0$，$z>0$，$d^2u>0$（当 $dx^2+dy^2+dz^2\neq 0$时），故函数u在点P_0取得极小值 $u(P_0)=\frac{15a}{4}\sqrt[16]{\frac{a}{16b}}$.

3647. $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$

$$(0\leqslant x\leqslant\pi;\quad 0\leqslant y\leqslant\pi;\quad 0\leqslant z\leqslant\pi).$$

解
$$\begin{aligned}du=&[\cos x-\cos(x+y+z)]dx\\&+[\cos y-\cos(x+y+z)]dy\\&+[\cos z-\cos(x+y+z)]dz.\end{aligned}$$

令$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$，得方程组

$$\begin{cases}\cos x-\cos(x+y+z)=0,\\ \cos y-\cos(x+y+z)=0,\\ \cos z-\cos(x+y+z)=0.\end{cases}$$

注意到$0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$，$0\leqslant z\leqslant\pi$，解之得静止点$P_0(0,0,0)$，$P_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$及$P_2(\pi,\pi,\pi)$.

在点P_1，有

$$\begin{aligned}d^2u=&-\sin x dx_2-\sin y dy^2-\sin z dz^2\\&+\sin(x+y+z)[d(x+y+z)]^2\\&=-dx^2-dy^2-dz^2-(dx+dy+dz)^2<0,\end{aligned}$$

故函数u在点P_1取得极大值$u(P_1)=4$.

由于P_0与P_2是所考虑区域$0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$，$0\leqslant z\leqslant\pi$的边界点，故函数在点P_0与P_2不达极值（根据极值定义，首先要求函数在所考虑的点的某邻域中有定义）．但如果放宽要求，对于边界点，仅将

其函数值与属于所考虑的区域而与此边界点很接近的点的函数值相比较，则在边界点也可引入达极值和达弱极值的概念．今对于点P_0及P_2的邻域中且属于上述区域的点(x,y,z)，显然有$\sin x\geqslant 0$, $\sin y\geqslant 0$, $\sin z\geqslant 0$．又

$$\sin(x+y+z)=\sin x\cos y\cos z-\sin x\sin y\sin z$$
$$+\cos x\sin y\cos z+\cos x\cos y\sin z$$
$$\leqslant \sin x+\sin y+\sin z-\sin x\sin y\sin z,$$

故$u\geqslant 0$．而当$x=y=0$时或$x=y=\pi$时都恒有$u=0$．因此．函数u在点P_0及P_2都达到弱极小值$u(P_0)=u(P_2)=0$（按上述边界点达极值的意义）．

3648．$u=x_1x_2^2\cdots x_n^n(1-x_1-2x_2-\cdots-nx_n)$

$(x_1>0, x_2>0, \cdots, x_n>0)$．

解 先考虑满足$1-x_1-2x_1-\cdots-nx_n=0, x_1>0$, $x_2>0$, …, $x_n>0$的点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$．显然函数u在这种点不达到极值（因为，例如，若保持x_2,x_3, …, x_n不变，而将x_1增大任意小的值，就有$u<0$，但将x_1减小任意小的值，则有$u>0$），故下面只需考察满足$1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k\neq 0$, $x_1>0$, …, $x_n>0$的点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$．

我们有

$$du=u\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{x_k}dx_k-\frac{u}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k}\sum_{k=1}^{n}kdx_k.$$

$$=u\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{x_k}-\frac{k}{1-\sum_{k=1}^{n}kx_k}\right)dx_k\right],$$

考虑到 $x_i>0$ 及 $1-\sum_{k=1}^{n}kx_k\neq 0$，故有 $u\neq 0$。

解方程组

$$\frac{k}{x_k}-\frac{k}{1-\sum_{k=1}^{n}kx_k}=0\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

得静止点$P_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{2}{n^2+n+2}=x_0.$$

$$d^2u=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{x_k}-\frac{k}{1-\sum_{k=1}^{n}kx_k}\right)dx_k\right]du$$

$$+u\left[\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{x_k^2}\right)dx_k^2+\frac{1}{\left(1-\sum_{k=1}^{n}kx_k\right)^2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}kdx_k\right)\left(-\sum_{k=1}^{n}kdx_k\right)\right].$$

在点P_0，有

$$d^2u=-\frac{u}{x_0^2}\left[\sum_{k=1}^{n}kdx_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}kdx_k\right)^2\right]$$

$$=-x_0^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\left[\sum_{k=1}^{n}kdx_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}kdx_k\right)^2\right]$$

<0 （当$\sum_{k=1}^{n}dx_k^2\neq 0$时），

故函数u在点P_0取得极大值 $u(P_0)=\left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$.

3649. $u=x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{2}{x_n}$ $(x_i>0, i=1,2,\cdots,n)$.

解 设 $y_1=x_1, y_2=\frac{x_2}{x_1},\cdots,y_k=\frac{x_k}{x_{k-1}},\cdots,y_n=\frac{x_n}{x_{n-1}}$,

则 $x_n=y_1y_2\cdots y_n$, $y_k>0$ $(k=1,2,\cdots,n)$, 且

$$u=y_1+y_2+y_3+\cdots+\frac{2}{y_1y_2\cdots y_n}.$$

记 $A=y_1y_2\cdots y_n$, 则可得

$$du=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{Ay_k}\right)dy_k.$$

令$\frac{\partial u}{\partial y_k}=0$得方程组

$$1-\frac{2}{Ay_k}=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n).$$

解之得静止点$P_0(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，其中

$$y_1=y_2=\cdots=y_n=2^{\frac{1}{n+1}}=y_0.$$

在点P_0，有

$$d^2u\Big|_{P=P_0}=\frac{2}{A}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y_k^2}dy_k^2+\frac{2}{Ay_k^2}\Big(\sum_{k=1}^{n}dy_k\Big)^2\Big|_{P=P_0}$$

$$=\frac{1}{y_0}\Big[\sum_{k=1}^{n}dy_k^2+\Big(\sum_{k=1}^{n}dy_k\Big)^2\Big]>0$$

$$\Big(\text{当}\sum_{k=1}^{n}dy_k^2\neq 0\text{时}\Big),$$

故函数 u 在 P_0 点取得极小值，也即在

$$x_1=y_1=2^{\frac{1}{n+1}},$$

$$x_2=y_2x_1=2^{\frac{2}{n+1}},$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_k=y_kx_{k-1}=2^{\frac{k}{n+1}},$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n=y_nx_{n-1}=2^{\frac{n}{n+1}}$$

处，函数 u 取得极小值 $u=(n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$.

3650. 惠更斯问题. 在 a 和 b 二正数间插入 n 个数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，使得分数

$$u=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_n+b)}$$

的值是最大.

解 记 $w=\dfrac{1}{u}=(a+x_1)\Big(1+\dfrac{x_2}{x_1}\Big)\Big(1+\dfrac{x_3}{x_2}\Big)\cdots\Big(1+\dfrac{b}{x_n}\Big)$.

设 $y_1=\dfrac{x_2}{x_1}$，$y_2=\dfrac{x_3}{x_2}$，$\cdots$，$y_n=\dfrac{b}{x_n}$，并记

$A=y_1y_2\cdots y_n$，则有

$$x_1=\frac{b}{y_1y_2\cdots y_n}=\frac{b}{A},$$

$$w=\left(a+\frac{b}{A}\right)(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_n).$$

又记 $m=a+\dfrac{b}{A}$，则有

$$dw=\sum_{k=1}^{n}\frac{w}{1+y_k}dy_k-\frac{wb}{mA}\sum_{k=1}^{n}\frac{dy_k}{y_k}$$

$$=w\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k}{1+y_k}-\frac{b}{mA}\right)\frac{dy_k}{y_k}.$$

令 $\dfrac{\partial w}{\partial y_k}=0$ 得方程组

$$\frac{y_k}{1+y_k}=\frac{b}{mA}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

解之得静止点$P_0(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，其中

$$y_1=y_2=\cdots=y_n=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}=y_0.$$

在点P_0，有

$$d^2u\Big|_{P=P_0}=w\sum_{k=1}^{n}d\left(\frac{y_k}{1+y_k}-\frac{b}{mA}\right)\frac{dy_k}{y_k}\Big|_{P=P_0}$$

$$=w\sum_{k=1}^{n}d\left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)\left(\frac{dy_k}{y_0}\right)\Big|_{P=P_0}$$

$$-w\sum_{k=1}^{n}\frac{dy_k}{y_0}\left[d\left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}A}\right)\right|_{P=P_0}$$

$$=\frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2}\sum_{k=1}^{n} dy_k^2+\frac{w(P_0)}{y_0\left(1+\frac{a}{b}A\right)^2_{P=P_0}}$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[dy_k\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aA}{by_k}dy_k\right)\right]_{P=P_0}$$

$$=\frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2}\left[\sum_{k=1}^{n} dy_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n} dy_k\right)^2\right]$$

$$>0\quad\left(\text{当}\sum_{k=1}^{n} dy_k^2\neq 0\text{时}\right),$$

故函数 w 在点 P_0 取得极小值，从而函数 u 在

$$\begin{cases} x_1=\frac{b}{A}=\frac{b}{y_0^n}=\frac{b}{a}\cdot a y_0^{-n}=a y_0^{n+1}\cdot y_0^{-n}=a y_0, \\ x_2=x_1 y_1=a y_0^2, \\ x_3=x_2 y_2=a y_0^3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n=\frac{b}{y_n}=\frac{b}{a}a y_0^{-1}=a y_0^{n+1} y_0^{-1}=a y_0^n, \end{cases}$$

即数 a，$x_1, x_2, \cdots$，x_n, b 构成有公比 $y_0=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 的几何级数时，其值最大，并且 u 的最大值为

$$u=\frac{1}{a(1+y_0)^{n+1}}=\left(a^{\frac{1}{n+1}}+b^{\frac{1}{n+1}}\right)^{-(n+1)}.$$

求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值：

3651．$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$．

解 微分得

$$(x-1)dx+(y+1)dy+(z-2)dz=0.$$

显见，当 $x=1$，$y=-1$时 $dz=0$. 代入原方程可解得 $z=6$及 $z=-2$. 又 $z=2$时为不可微的. 为判断极值，求二阶微分，得

$$dx^2+dy^2+(z-2)d^2z+dz^2=0.$$

以 $x=1$，$y=-1$，$z=6$代入，并考虑 $dz=0$，得

$$d^2z=-\frac{1}{4}(dx^2+dy^2)<0 \quad (\text{当}dx^2+dy^2\neq 0\text{时}),$$

故当 $x=1$，$y=-1$时，隐函数 z 取得极大值 $z=6$. 同法可判断得：当 $x=1$，$y=-1$时，隐函数 z 也取得极小值，且其值为 $z=-2$.

不难看出，$z=2$是球的切面平行于Oz 轴的地方，因此函数 z 不取得极值.

3652. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

解 微分一次，得

$$(2x-z+2)dx+(2y-z+2)dy+(2z-x-y+2)dz=0.$$

解方程组

$$\begin{cases} 2x-z+2=0, \\ 2y-z+2=0, \\ x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0 \end{cases}$$

得 $x_1=y_1=-(3+\sqrt{6})$，$z_1=-(4+2\sqrt{6})$；$x_2=y_2=-(3-\sqrt{6})$，$z_2=2\sqrt{6}-4$.

再微分一次，并注意到 $dz=0$，即得

$$2dx^2+2dy^2+(2z-x-y+2)d^2z=0.$$

在点(x_1,y_1,z_1)，$d^2z=\frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2+dz^2)>0$，故当$x=y=-(3+\sqrt{6})$时，取得极小值$z=-(4+2\sqrt{6})$. 同法可知，当$x=y=-(3-\sqrt{6})$时，取得极大值$z=2\sqrt{6}-4$.

对于dz的系数$2z-x-y+2=0$时代表的情况，与上题类似也不取得极值.

3653. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

解 微分一次，得

$$2(x^2+y^2+z^2)(xdx+ydy+zdz)$$
$$=a^2(xdx+ydy-zdz).$$

令$dz=0$，得方程

$$[2(x^2+y^2+z^2)-a^2](xdx+ydy)=0.$$

解之，得$x=y=0$及$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$.

以$x=y=0$代入原方程，解得$z=0$. 这是隐函数的一个奇点. 把原式看作z^2的一个方程，舍去增根，可解出

$$z^2=-(a^2+x^2+y^2)+\sqrt{a^4+3a^2(x^2+y^2)},$$

显然z有正负两支在$(0,0,0)$点相交. 因此，不认为z在$(0,0,0)$点取得极值.

以$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$代入原方程，解得

$$x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2,\quad z^2=\frac{a^2}{8}.$$

为考虑极值，将一次微分式改写为

$$[2(x^2+y^2+z^2)-a^2](xdx+ydy)+$$
$$[2(x^2+y^2+z^2)+a^2]zdz=0.$$

将上式再微分一次，注意到 $dz=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$，即得

$$a^2zd^2z=-2(xdx+ydy)^2,$$

故当 $x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2$，$z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$时，$d^2z\leqslant 0$，函数 z 取得弱极大值 $z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$；当 $x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2$，$z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$时，$d^2z\geqslant 0$，函数 z 取得弱极小值 $z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

求下列函数的条件极值点：

3654. $z=xy$，若 $x+y=1$.

解 设 $F(x,y)=xy+\lambda(x+y-1)$.解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=y+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=x+\lambda=0,\\ x+y=1\end{cases}$$

得 $x=y=-\lambda=\frac{1}{2}$,$z=\frac{1}{4}$. 由于当$x\to\pm\infty$时，$y\to\mp\infty$，故 $z=xy\to-\infty$. 从而得知：点 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$

为条件极值点，且$z=\frac{1}{4}$为极大值.

如将$z=xy$改写为$z=y(1-y)$，则成为普通极值. 易知极大值点为$y=\frac{1}{2}$，从而$x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$z=\frac{1}{4}$.

3655. $z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$，若$x^2+y^2=1$.

解 设$F(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\lambda(x^2+y^2-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{a}+2\lambda x=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{b}+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

可得

$$\lambda=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2|ab|},\quad x=\mp\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$y=\mp\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

其中$\varepsilon=\text{sgn}\ ab\neq 0$. 相应地，$z=\mp\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$.

由于函数z在闭圆周$x^2+y^2=1$上连续且不为常数，故必取得最大值和最小值并且最大值与最小值

不相等．这里可疑点仅两个．

因此，当$x=-\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y=-\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$时，函数值$z=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$必为最小值，从而是极小值；当

$x=\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y=\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$时，$z=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$为最大值，从而是极大值．

3656．$z=x^2+y^2$，若$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$．

解 设$F(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)$．解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2x+\frac{1}{a}\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y+\frac{1}{b}\lambda=0,\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\end{cases}$$

可得

$$\lambda=-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2},\quad x=\frac{ab^2}{a^2+b^2},\quad y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}.$$

由于当$x\to\infty$，$y\to\infty$时，$z\to+\infty$，故函数z必在有限处取得最小值．这里可疑点仅一个．因此，当$x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$，$y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$时，函数z取得极小值

$$z=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

注　如果用二阶微分判别，则易从

$$d^2z=2(dx^2+dy^2)>0$$

（不论 dx，dy 之间有何约束条件，此式恒成立）可知 $z=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$为极小值.

3657. $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$，若 $x^2+y^2=1$.

解　设 $F(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2-\lambda(x^2+y^2-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2[(A-\lambda)x+By]=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2[Bx+(C-\lambda)y]=0, & (2)\\ x^2+y^2=1. & (3)\end{cases}$$

由 $x^2+y^2=1$ 知 x，y 不全为零，故 λ 必须满足方程

$$\begin{vmatrix}A-\lambda & B\\ B & C-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(A+C)\lambda+(AC-B^2)=0.\quad(4)$$

当 $(A-C)^2+4B^2=0$ 时，所研究的函数为常数；当 $(A-C)^2+4B^2\neq 0$ 时，方程（4）有两个不等的实根，记为 λ_1和 λ_2（$\lambda_1>\lambda_2$）. 由方程组（1）、（2）、（3）可解出

$$x_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1-C)}{\sqrt{B^2+(\lambda_1-C)^2}},\ y_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1-A)}{\sqrt{B^2+(\lambda_1-A)^2}},$$

$$x_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2-C)}{\sqrt{B^2+(\lambda_2-C)^2}},\ y_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2-A)}{\sqrt{B^2+(\lambda_2-A)^2}}.$$

相应地，有

$$z(x_1,y_1)=Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2$$
$$=(Ax_1+By_1)x_1+(Bx_1+Cy_1)y_1.$$

由（1）、（2）可解得

$$Ax_1+By_1=\lambda_1x_1,\quad Bx_1+Cy_1=\lambda_1y_1,$$

故得

$$z(x_1,y_1)=\lambda_1x_1^2+\lambda_1y_1^2=\lambda_1(x_1^2+y_1^2)=\lambda_1.$$

同理可得

$$z(x_2,y_2)=\lambda_1,\quad z(x_3,y_3)=z(x_4,y_4)=\lambda_2.$$

由于函数 z 在单位球面上连续且不为常数，故必取得最大值和最小值并且最大值和最小值不相等．这里可疑点仅四个 (x_i,y_i) $(i=1,2,3,4)$，而且 $z(x_1,y_1)=z(x_2,y_2)=\lambda_1$，$z(x_3,y_3)=z(x_4,y_4)=\lambda_2$．于是，当 $x=x_{1,2}$，$y=y_{1,2}$ 时，函数 z 取得最大值 $z=\lambda_1$，因而也是极大值；当 $x=x_{3,4}$，$y=y_{3,4}$ 时，函数 z 取得最小值 $z=\lambda_2$，因而也是极小值．

3658. $z=\cos^2x+\cos^2y$，若 $x-y=\frac{\pi}{4}$.

解 设 $F(x,y)=\cos^2x+\cos^2y+\lambda(x-y-\frac{\pi}{4})$.

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = -\sin 2x + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -\sin 2y - \lambda = 0, \\ x - y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

可得

$$x_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad y_k = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

相应地，当 k 为偶数时，$z = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$；当 k 为奇数时，$z = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

由于所给连续函数 z 必在任意有限区域内取得最大值和最小值，而且 z 又是关于 x、y 的周期(周期为 π)函数，故当 k 为偶数时，函数 z 在点(x_k, y_k)取得最大值 $z = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，从而是极大值；当$k$为奇数时，函数 z 在点(x_k, y_k)取得最小值 $z = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，从而是极小值.

3659. $u = x - 2y + 2z$，若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

解 设 $F(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

可得

$$x=\pm\frac{1}{3},\quad y=\mp\frac{2}{3},\quad z=\pm\frac{2}{3}.$$

相应地，$u=\pm 3$.

由于所给函数在闭球面上连续且不为常数，故必取得最大值及最小值并且最大值与最小值不相等。这里可疑点仅两个，于是，当 $x=\frac{1}{3}$，$y=-\frac{2}{3}$，$z=\frac{2}{3}$时，函数 u 取得最大值 $u=3$，因而也是极大值；当 $x=-\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$，$z=-\frac{2}{3}$时，函数 u 取得最小值 $u=-3$，因而也是极小值.

3660. $u=x^m y^n z^p$，若 $x+y+z=a$ $(m>0, n>0, p>0, a>0)$*).

解 设 $w=\ln u=m\ln x+n\ln y+p\ln z$.

$$F(x,y,z)=w-\frac{1}{\lambda}(x+y+z-a).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{m}{x}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{n}{y}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{p}{z}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\[2mm] x+y+z=a\end{cases}$$

*) 编者注：应加上条件 $x>0$，$y>0$，$z>0$.

可得

$$x=\frac{am}{m+n+p},\quad y=\frac{an}{m+n+p},\quad z=\frac{ap}{m+n+p}.$$

相应地，$u=\dfrac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$.

连续函数 w 定义在平面 $x+y+z=a$ 于第一卦限内的部分，边界由三条直线

$$\begin{cases}x+y=a,\\ z=0,\end{cases}\quad \begin{cases}y+z=a,\\ x=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}z+x=a,\\ y=0\end{cases}$$

组成．当点 P 趋于边界上的点时，显然有 $w\to-\infty$。因此，函数 w 在区域内取得最大值．由于可疑点仅一个，故当 $x=\dfrac{am}{m+n+p}$，$y=\dfrac{an}{m+n+p}$

$z=\dfrac{ap}{m+n+p}$ 时，函数 u 取得最大值

$u=\dfrac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$，因面也是极大值．

3661．$u=x^2+y^2+z^2$，若 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\quad(a>b>c>0)$.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$．解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x\left(1+\dfrac{\lambda}{a^2}\right)=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y\left(1+\dfrac{\lambda}{b^2}\right)=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z\left(1+\dfrac{\lambda}{c^2}\right)=0,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\end{cases}$$

可得

$x=\pm a, y=z=0$; $x=z=0$, $y=\pm b$;

$x=y=0$, $z=\pm c$.

相应地，有

$u(\pm a,0,0)=a^2$, $u(0,\pm b,0)=b^2$, $u(0,0,\pm c)=c^2$. 由于 $a>b>c>0$，故连续函数 u 在点 $(\pm a,0,0)$取得最大值 a^2，因而也是极大值；在点$(0,0,\pm c)$取得最小值 c^2，因而也是极小值.

在点$(0,\pm b,0)$处，对应的 $\lambda=-b^2$，且

$$d^2F=2\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)dx^2+2\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)dy^2$$

$$+2\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)dz^2$$

$$=2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)dx^2+2\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)dz^2.$$

把 x,z 当自变量，y 看成由条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所确定的 x 和 z 的函数.在点$(0,\pm b,0)$，有$d^2u=d^2F$，

而$1-\frac{b^2}{a^2}>0$，$1-\frac{b^2}{c^2}<0$。因此，d^2u 的符号不定，从而函数 u 在点（0，$\pm b$，0）不取得极值。

3662. $u=xy^2z^3$，若 $x+2y+3z=a$ （$x>0, y>0, z>0$，$a>0$）。

解 设 $w=\ln u=\ln x+2\ln y+3\ln z$，

$$F(x,y,z)=w-\frac{1}{\lambda}(x+2y+3z-a).$$

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{\lambda}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2}{y}-\frac{2}{\lambda}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{3}{z}-\frac{3}{\lambda}=0,\\ x+2y+3z=a\end{cases}$$

可得

$$x=y=z=a.$$

类似3660题的讨论可知，函数 u 当 $x=y=z=\frac{a}{6}$时取得极大值 $u=\left(\frac{a}{6}\right)^6$.

3663. $u=xyz$，若 $x^2+y^2+z^2=1$，$x+y+z=0$。

解 设 $F(x, y, z)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x+y+z)$。解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=yz+2\lambda x+\mu=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=xz+2\lambda y+\mu=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=xy+2\lambda z+\mu=0, & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1, & (4)\\ x+y+z=0. & (5)\end{cases}$$

(1)－(2)，(2)－(3)，得

$$\begin{cases}(x-y)(2\lambda-z)=0, & (6)\\ (y-z)(2\lambda-x)=0. & (7)\end{cases}$$

由(6)，若 $x-y=0$，代入(5)得 $z=-2x$. 再代入(4)，解得静止点 $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ 和 $P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

如果 $x-y\neq 0$，则 $z=2\lambda$. 由(7)，若 $y-z=0$，类似上面解法可得静止点 $P_3\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 和 $P_4\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$；若 $y-z\neq 0$，则 $x=2\lambda$，故 $x=z$，类似上面解法又可得静止点 $P_5\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 和 $P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

相应地，有

$$u(P_1)=u(P_3)=u(P_5)=-\frac{1}{3\sqrt{6}},$$

$$u(P_2)=u(P_4)=u(P_6)=\frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

类似前面各题的讨论可知，函数 u 在点 P_1，P_3及 P_5 取得极小值 $u=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$；在点 P_2，P_4 及 P_6 取得极大值 $u=\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

3664. $u=\sin x\sin y\sin z$，若 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$

$$(x>0,\ y>0,\ z>0).$$

解 由 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$及 $x>0$，$y>0$，$z>0$ 不难得出

$$0<x<\frac{\pi}{2},\quad 0<y<\frac{\pi}{2},\quad 0<z<\frac{\pi}{2}.$$

设 $w=\ln u=\ln\sin x+\ln\sin y+\ln\sin z$,

$$F(x,y,z)=w+\lambda\left(x+y+z-\frac{\pi}{2}\right).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\operatorname{ctg}x+\lambda=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}=\operatorname{ctg}y+\lambda=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial z}=\operatorname{ctg}z+\lambda=0,\\[2mm] x+y+z=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

并注意到点 $P(x,y,z)$ 在第一卦限，即得静止点 P_0 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$.

类似3660题的讨论，当点(x,y,z)趋于平面$x+y+z=\frac{\pi}{2}$在第一卦限部分的边界时，$u\to 0$；面在边界内部 $u>0$。因此，函数 u 在边界内部取得最大值，故在点P_0取得极大值 $u(P_0)=\frac{1}{8}$.

3665. $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$，若 $x^2+y^2+z^2=1$，$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$ $(a>b>c>0$，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1)$.

解 设 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=2\left(\frac{1}{a^2}-\lambda\right)x+\mu\cos\alpha=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2\left(\frac{1}{b^2}-\lambda\right)y+\mu\cos\beta=0, & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial z}=2\left(\frac{1}{c^2}-\lambda\right)z+\mu\cos\gamma=0, & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1, & (4)\\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0, & (5)\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. & (6) \end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x、y、z，然后相加，并注意到(4)、(5)两式，即得

$$\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=u(x,y,z). \tag{7}$$

再将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$，然后相加，并注意到(5)、(6)两式，即得

$$\mu=-2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2}\right). \tag{8}$$

将(8)式代入(1)、(2)、(3)，得

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{a^2}-\lambda\right)x-\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{b^2}y-\dfrac{\cos\alpha\cos\gamma}{c^2}z=0,\\ -\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}x+\left(\dfrac{\sin^2\beta}{b^2}-\lambda\right)y-\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{c^2}z=0,\\ -\dfrac{\cos\alpha\cos\gamma}{a^2}x-\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{b^2}y+\left(\dfrac{\sin^2\gamma}{c^2}-\lambda\right)z=0.\end{cases} \tag{9}$$

要 $\frac{x}{a^2}$，$\frac{y}{b^2}$，$\frac{z}{c^2}$ 为方程组(9)的非零解，必须有

$$\begin{vmatrix}\sin^2\alpha-a^2\lambda & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma\\ -\cos\alpha\cos\beta & \sin^2\beta-b^2\lambda & -\cos\beta\cos\gamma\\ -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & \sin^2\gamma-c^2\lambda\end{vmatrix}=0.$$

展开计算可得

$$\lambda\left[\lambda^2-\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\lambda+\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)\right]=0. \tag{10}$$

由(7)知 $\lambda\neq 0$，且不难验证(10)式在消去 λ 后得到

的二次方程有两个不等的实根 $\lambda_1<\lambda_2$.

固定 $\lambda=\lambda_1$，代入方程组(9)，可得到关于(x, y, z)有一个自由度的一个解系，再代入方程(4)，可得对应于 $\lambda=\lambda_1$ 的两个静止点$P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$. 由(7)知，对应的$u(P_1)=u(P_2)=\lambda_1$. 同理可求得对应于 $\lambda=\lambda_2$的两个静止点 $P_3(x_3, y_3, z_3)$和$P_4(x_4, y_4, z_4)$，且有 $u(P_3)=u(P_4)=\lambda_2$.

P_1, P_2, P_3, P_4为满足方程组(1)~(5)的一切解所对应的点. 类似前面各题的讨论可知，函数 u 在点P_1及P_2取得极小值λ_1，而在点P_3及P_4取得极大值λ_2.

3666+. $u=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$，若 $Ax+By+Cz=0$, $x^2+y^2+z^2=R^2$, $\frac{\xi}{\cos\alpha}=\frac{\eta}{\cos\beta}=\frac{\zeta}{\cos\gamma}$, 其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

解 设 $F(x, y, z)=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2+\lambda(Ax+By+Cz)+\mu(x^2+y^2+z^2-R^2)$.

记 $\xi=\rho\cos\alpha, \eta=\rho\cos\beta, \zeta=\rho\cos\gamma$, $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$.

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2(x-\rho\cos\alpha)+\lambda A+2\mu x=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2(y-\rho\cos\beta)+\lambda B+2\mu y=0, & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial z}=2(z-\rho\cos\gamma)+\lambda C+2\mu z=0, & (3)\\ x^2+y^2+z^2=R^2, & (4)\\ Ax+By+Cz=0, & (5)\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. & (6)\end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 A、B、C，然后相加，并注意到(5)式，即得

$$-2\rho(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)+\lambda(A^2+B^2+C^2)=0,$$

$$\lambda=\frac{2\rho(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)}{A^2+B^2+C^2}. \qquad (7)$$

再将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x、y、z，然后相加，并注意到(4)式和(5)式，即得

$$2(1+\mu)R^2=2\rho(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma). \qquad (8)$$

又将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$，然后相加，并注意到(6)式，即得

$$\begin{aligned}2(1+\mu)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)&=2\rho-\lambda(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)\\&=2\rho\left[1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}\right]. \qquad (9)\end{aligned}$$

由(8)，(9)可得

$$\begin{aligned}(1+\mu)^2R^2&=(1+\mu)\rho(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\\&=\rho^2\left[1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}\right].\end{aligned}$$

即

$$1+\mu=\pm\frac{\rho}{R}\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (10)$$

由(1)，(2)，(3)可得

$$x=\frac{2\rho\cos\alpha-\lambda A}{2(1+\mu)},\quad y=\frac{2\rho\cos\beta-\lambda\beta}{2(1+\mu)},$$

$$z=\frac{2\rho\cos\gamma-\lambda C}{2(1+\mu)}.$$

把(7)式和(10)式代入上式，即可得$P_1(x_1,y_1,z_1)$和$P_2(x_2,y_2,z_2)$，其中P_1对应于(10)式取正号，而P_2对应于(10)式取负号.下面求$u(P_1)$和$u(P_2)$. 由(9)、(10)可得

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$
$$=\pm R\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}.$$

于是，

$$u(P_1)=(x_1-\rho\cos\alpha)^2+(y_1-\rho\cos\beta)^2$$
$$+(z_1-\rho\cos\gamma)^2$$
$$=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-2\rho(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta$$
$$+z_1\cos\gamma)+\rho^2$$
$$=R^2+\rho^2-2\rho R\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}.$$

同理可得

$$u(P_2)=R^2+\rho^2+2\rho R$$
$$\cdot\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}.$$

类似以前各题的讨论可知：$u(P_2)$为极大值，$u(P_1)$为极小值.

3667. $u=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，若$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}=1$ $(a_i>0;\ i=1,\ 2,\cdots,n)$.

解 设$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\lambda\left(\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}-1\right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}=2x_i+\dfrac{\lambda}{a_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n), \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{a_i}=1 \end{cases}$$

可得静止点$P_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中

$$x_i=\frac{1}{a_i}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\Big)^{-1} \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

由于 $d^2u=d^2F=2\sum\limits_{i=1}^{n}dx_i^2>0$（它不受约束条件的限制），故当 $x_i=\dfrac{1}{a_i}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j^2}\Big)^{-1}$时，函数 u 取得极小值

$$u=\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{1}{a_i}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\Big)^{-1}\Big]^2=\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\Big)^{-1}.$$

3668. $u=x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p$ （$p>1$），若 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ （$a>0$）.

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-a)$.解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}=px_i^{p-1}+\lambda=0 \quad (i=1,2,\cdots,n), \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a \end{cases}$$

得 $x_i=\dfrac{a}{n}$ （$i=1,2,\cdots,n$）. 由于

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}=\begin{cases} p(p-1)x_i^{p-2}, & i=j, \\ 0 & , i\neq j, \end{cases}$$

故当 $x_i=\frac{a}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$时，

$$d^2F=p(p-1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a}{n}\right)^{p-2}dx_i^2>0\quad (当\sum_{i=1}^{n}dx_i^2\neq 0时)$$

，它不受约束条件的限制，故函数 u 取得极小值 $u=\frac{a^p}{n^{p-1}}$.

这里应该指出的是，对于一般的实数p，应限定 $x_i>0$.

3669. $u=\frac{\alpha_1}{x_1}+\frac{\alpha_2}{x_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{x_n}$，若 $\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n=1$ $(\alpha_i>0,\ \beta_i>0;\ i=1,2,\cdots,n)$*).

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\alpha_1}{x_1}+\frac{\alpha_2}{x_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{x_n}+\lambda(\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n-1)$.

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x_i}=-\frac{\alpha_i}{x_i^2}+\lambda\beta_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n),\\ \sum_{i=1}^{n}\beta_ix_i=1\end{cases}$$

得 $x_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{-1}(i=1,2,\cdots,n)$. 由于

$$d^2F=2\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x_i^3}dx_i^2>0,$$

*) 编者注：本题应加条件 $x_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

故当$x_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{-1}$时，函数$u$取得极小值

$$u=\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^2.$$

3670. $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$，若$x_1+x_2+\cdots+x_n=a$（$a>0$，$\alpha_i>1$，$i=1,2,\cdots,n$）*)。

解 设 $w=\ln u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln x_i$，

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=w-\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\ln x_i-\frac{x_i}{\lambda}\right)+\frac{a}{\lambda}.$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{\alpha_i}{x_i}-\dfrac{1}{\lambda}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a\end{cases}$$

得 $x_i=\dfrac{a\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 由于

$$d^2w=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x_i^2}dx_i^2<0 \quad \left(当\sum_{i=1}^{n}dx_i^2\neq 0时\right)$$

不论dx_i之间有什么约束条件恒成立，故函数w当$x_i=\dfrac{a\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$时取得极大值，

---

*) 编者注：本题应加条件$x_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$。

即函数 u 当 $x_i=\dfrac{a\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$ 时取得极大值

$$u=\left(\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\cdot\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\cdots\alpha_n^{\alpha_n}.$$

3671. 若 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$，求二次型 $u=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 的极值.

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u-\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, & (1)\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_2}=a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, & (2)\\ \cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_n}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0, & (n)\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1. & (n+1)\end{cases}$$

前 n 个方程要有非零解，必须矩阵 (a_{ij}) 的特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 有解，其中 A 为以 a_{ij} 为元素的实对称矩阵，E 为单位矩阵. 由线性代数中关于欧氏空间的理论知，此特征方程必有 n 个实根，即有 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 满足 $|A-\lambda E|=0$. 对于任一根 λ_k，代入方程(1)~(n)，可求得$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的一个解空间，解空间的维数，等于 λ_k 的重数. 解空间中的单位元素即方程组(1)~$(n+1)$的根. 当 λ_k 是单重根时，解空

间是一维的，单位元素只有两个。当 λ_k 是多重根时，对应 λ_k 的单位元素就有无穷多个了。

对于 λ_k 的解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，显然满足方程组(1)～$(n+1)$。因此，有 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda_k x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$。从而得

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}x_i\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_k x_i^2=\lambda_k\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\lambda_k.$$

由于函数 u 在 n 维球面 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 上连续，故必取得最大值和最小值。于是，对应于 λ_1 和 λ_n 的解，分别使函数 u 取得最大值 λ_1 和最小值 λ_n，因而也是 u 的极大值和极小值，或是 u 的弱极大值和弱极小值，视 λ_1 和 λ_n 的重数而定（多重时为弱极值）。由线性代数中把 d^2F 化标准型的方法，可证：对于不等于 λ_1 和 λ_n 的 λ_k，二次型不取得极值。

3672. 若 $n\geqslant1$ 及 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$，证明不等式

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

证　考虑函数 $z=\dfrac{x^n+y^n}{2}$ 在条件 $x+y=a$ $(a>0,x\geqslant0,y\geqslant0)$ 下的极值问题。设

$$F(x,y)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)+\lambda(x+y-a).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{n}{2}x^{n-1}+\lambda=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{n}{2}y^{n-1}+\lambda=0, \\ x+y=a\end{cases}$$

可得 $x=y=\dfrac{a}{2}$.

将点$\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$与边界点$(0,a)$、$(a,0)$的函数值进行比较（注意到$n\geqslant 1$）:

$$z(0,a)=z(a,0)=\frac{a^n}{2}\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^n=z\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)\quad (n\geqslant 1),$$

即知函数 z 当$x+y=a$时的最小值为$\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$.从而有

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

（当$x+y=a$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 时）. (1)

下面我们证明

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \text{（当 } x\geqslant 0, y\geqslant 0 \text{时）}. \quad (2)$$

当 $x=y=0$ 时，不等式(2)显然成立；当 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 且 x,y不同时为零时，令 $x+y=a$, 则 $a>0$. 于是，由不等式(1)即得

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^n=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

由此可知，不等式(2)成立. 证毕.

3673. 证明和尔窦不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

$(a_i \geqslant 0，x_i \geqslant 0，i=1,2,\cdots,n；k>1，\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1)$。

证 我们首先证明函数

$$u=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

在条件 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A$ $(A>0)$下的最小值是A。为此，对n用数学归纳法。

当$n=1$时，显然有

$$(a_1^k)^{\frac{1}{k}}(x_1^{k'})^{\frac{1}{k'}}=a_1x_1=A.$$

设当$n=m$时，命题为真，故对任意m个数a_1，$a_2,\cdots,a_m(a_i\geqslant 0)$，当$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = A$ $(x_1\geqslant 0,\cdots,x_m\geqslant 0)$时，必有

$$A\leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}.$$

我们证明当$n=m+1$时命题也真．设$\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i = A$，

$u=\alpha^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$，其中$\alpha=\sum_{i=1}^{m+1} a_i^k$，求$u$的最小值。令

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_{m+1})=u(x_1,x_2,\cdots,x_{m+1}) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i - A\right).$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{a^{\frac{1}{k'}}}{k'}\left(\sum\limits_{i=1}^{m+1} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}-1}(k' x_i^{k'-1})-\lambda a_i=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=1,2,\cdots,m+1), \\ \sum\limits_{i=1}^{m+1} a_i x_i=A \end{cases}$$

可得

$$\frac{x_i^{k'-1}}{a_i}=\frac{\lambda}{a^{\frac{1}{k}}}\left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k}}=\mu^{k'-1}\ (i=1,2,\cdots,m+1).$$

（这里引入了记号 μ），即

$$x_i=(a_i\mu^{k'-1})^{\frac{1}{k'-1}}=a_i^{\frac{1}{k'-1}}\mu=\mu a_i^{k-1},$$

从而有

$$\mu\sum_{i=1}^{m+1}a_i a_i^{k-1}=\mu\sum_{i=1}^{m+1}a_i^k=\mu a=A,$$

$$\mu=\frac{A}{a}.$$

于是，解得满足极值必要条件的唯一解

$$x_i^0=\frac{A}{a}a_i^{k-1}\quad(i=1,2,\cdots,m+1).$$

对应的函数值为

$$u_0=u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{m+1}^0)=a^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{i=1}^{m+1}\left(\frac{A}{a}a_i^{k-1}\right)^{k'}\right]^{\frac{1}{k'}}$$

$$=a^{\frac{1}{k}}\frac{A}{a}\left[\sum_{i=1}^{m+1}a_i^{(k-1)k'}\right]^{\frac{1}{k'}}=a^{\frac{1}{k}-1}A\left(\sum_{i=1}^{m+1}a_i^k\right)^{\frac{1}{k'}}$$

$$=Aa^{\frac{1}{k}-1}a^{\frac{1}{k'}}=A.$$

所研究的区域$\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i = A$，$x_i \geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m+1)$是$m+1$维空间中一个$m$维平面在第一卦限的部份，其边界由$m+1$个$m-1$维平面(之一部分)所组成：$x_i=0$，$\sum_{j=1}^{m+1} a_j x_j = A$（$a_j \geqslant 0$，$x_j \geqslant 0$；$i=1,2,\cdots,m+1$）。在这些边界面上，求

$$\begin{aligned}&u(x_1,x_2,\cdots,x_{m+1})\\&\quad=u(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_{m+1})\\&\quad=a^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j^{k'}+\sum_{j=i+1}^{m+1} x_j^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\end{aligned}$$

的最小值变为求m个变量的最小值。以估计$x_{m+1}=0$，$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = A$的最小值为例。根据归纳法假设，注意到

$a=\sum_{i=1}^{m+1} a_i^k \geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i^k$，即有

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_m,0)=a^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

$$\geqslant\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\geqslant\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = A.$$

因此，u在边界面上的最小值不小于A．由此可知，u在区域上的最小值为$u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{m+1}^0)=A$，故命题当$n=m+1$时为真。于是，由归纳法可知

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\geqslant A,$$

当$\sum_{i=1} a_i x_i = A$，$x_i \geqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,n)$时．（1）

下面我们证明和尔窦不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} \quad (a_i \geqslant 0,\ x_i \geqslant 0) \quad (2)$$

成立．事实上，若 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$，则(2)式显然成立；若 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i > 0$，令 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A$，则 $A > 0$．于是，根据不等式(1)知 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} \geqslant A = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$，故不等式(2)成立．证毕．

注．和尔窦(Hölder)不等式是一个重要而常用的不等式，而且还可推广到一般的形式，证明方法也很多．例如，可参看 G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G.Pólya 合著的名著"Inequalities"(Second Edition, 1952), Chapter Ⅱ, 2.7—2.8.

3674. 对于 n 阶行列式 $A = |a_{ij}|$ 证明哈达马不等式

$$A^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right).$$

证 证法一

为区别起见，以下用 A 表矩阵 (a_{ij})，$|A|$ 表行列式 $|a_{ij}|$．考虑函数 $u = |A| = |a_{ij}|$ 在条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 下的极值问题．其中 $S_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$．

由于上述 n 个条件限制下的 n^2 元点集是有界闭集，故连续函数 u 必在其上取得最大值和最小值．下面我们求函数 u 满足条件极值的必要条件．设

$$F=u-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2-S_i\right).$$

由于函数 u 是多项式．当按第 i 行展开时，有

$$u=|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式．解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}=A_{ij}-2\lambda_i a_{ij}=0\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

得 $a_{ij}=\dfrac{A_{ij}}{2\lambda_i}$．当 $i\neq k$ 时，有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{kj}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}a_{kj}}{2\lambda_i}=\frac{1}{2\lambda_i}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}a_{kj}=0,$$

故当函数 u 满足极值的必要条件时，行列式不同的两行所对应的向量必直交．若以 A' 表示 A 的转置矩阵，则由行列式的乘法得

$$u^2=|A'|\cdot|A|=\begin{vmatrix}S_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & S_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & S_n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}S_i.$$

因此，函数 u 满足极值的必要条件时，必有

$$u=\pm\sqrt{\prod_{i=1}^{n}S_i}.$$

由于显然函数 u 在条件 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2=S_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 下不恒为常数，故

$$u_{max}=\sqrt{\prod_{i=1}^{n}S_i},\quad u_{min}=-\sqrt{\prod_{i=1}^{n}S_i}.$$

从而

$$|A|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}S_i,$$

$$当\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=S_i\quad(i=1,2,\cdots,n)时,\qquad(1)$$

下面我们证明

$$|A|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right).\qquad(2)$$

若至少有一个 i，使 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=0$，则 $a_{ij}=0\,(j=1,2,\cdots,n)$.从而$|A|=0$.于是不等式(2)显然成立。

若对一切 $i(i=1,2,\cdots,n)$，都有 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\neq 0$.令

$S_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$，则 $S_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$.于是，根据不等式(1)即得

$$|A|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}S_i=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right),$$

故不等式(2)成立。证毕。

证法二

如将原题归一化，则也可获证.设

$$\overline{a_{ij}}=\frac{a_{ij}}{\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}}\qquad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

则有

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}^2=1 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

从而原命题就可转化为证明不等式

$$|A|\leqslant 1,$$

其中$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2=1(i=1,2,\cdots,n)$, $A=(a_{ij})$, $|A|=|a_{ij}|$.

设 $F=|A|+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2-1\right)$. 解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}=A_{ij}+2\lambda_i a_{ij}=0,$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$. 于上式两端乘以 a_{ij}, 并对 $j=1,2,\cdots,n$ 求和, 即得

$$|A|+2\lambda_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

从而有

$$\lambda_i=-\frac{|A|}{2} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

也即

$$A_{ij}=a_{ij}|A| \quad (i,j=1,2,\cdots,n),$$

故得

$$\begin{vmatrix} A_{11}\cdots A_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ A_{n1}\cdots A_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}|A| & \cdots & a_{1n}|A| \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}|A| & \cdots & a_{nn}|A|\end{vmatrix},$$

上式左端的行列式叫做$|A|$的附属行列式,记为$|A^*|$. 由线性代数知识可知,当$|A|=0$时,$|A^*|=0$.当$|A|\neq 0$时, $|A||A^*|=\begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A|\end{vmatrix}=|A|^n$, 故有

$|A^*|=|A|^{n-1}$.于是,

$$|A|^{n-1}=|A|^{n+1}.$$

由于$|A|$的极值必须满足上式，故不难推知$|A|_{max}=1$，$|A|_{min}=-1$。从而得知：当$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=1$ $(i=1,2,\cdots,n)$时，恒有

$$|A|^2\leqslant 1 \text{ 或 } |A|\leqslant 1.$$

求下列函数在指定域内的上确界(sup)和下确界(inf)：

3675. $z=x-2y-3$，若$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant x+y\leqslant 1$.

解 以D表区域$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant x+y\leqslant 1$，它是一个有界闭区域（为一闭三角形），故连续函数$z$在其上必有最大值和最小值．由于$z$是$x,y$的线性函数，故不存在静止点，因此，最大值与最小值都在D的边界上达到．D的边界为三条直线段：$y=0$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，$x=0$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$，$x+y=1$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$；在其上$z$分别变成一元函数：$z=x-3$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，$z=-2y-3$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$，$z=3x-5$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$．由于这些函数都是一元线性函数，故也无静止点，其最大值与最小值必在此三线段的端点（即点$(0,0)$，点$(1,0)$，点$(0,1)$）达到．由此可知，z在D上的最大值与最小值必在此三点$(0,0)$,$(1,0)$,$(0,1)$中达到．

由于

$$z(0,0)=-3,\quad z(1,0)=-2,\quad z(0,1)=-5,$$

故

$$\sup z = -2, \quad \inf z = -5.$$

3676. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$，若 $x^2 + y^2 \leqslant 25$.

解 考虑函数 z 在区域 $x^2 + y^2 < 25$ 内的静止点：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 12 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + 16 = 0. \end{cases}$$

在区域内无解，故连续函数 z 的最大值与最小值必在边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上达到.

考虑函数 z 在边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上的条件极值.设 $F(x, y) = z - \lambda(x^2 + y^2 - 25)$.解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x - 12 - 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + 16 - 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

可得静止点 $P_1(3, -4)$ 及 $P_2(-3, 4)$.由于

$$z(3, -4) = -75, \quad z(-3, 4) = 125,$$

故得

$$\sup z = 125, \quad \inf z = -75.$$

3677. $z = x^2 - xy + y^2$，若 $|x| + |y| \leqslant 1$.

解 求函数 z 在区域 $|x| + |y| < 1$ 内的静止点：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x = 0, \end{cases}$$

解得静止点 $P_0(0, 0)$。相应地，$z(P_0) = 0$.

再在边界：$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x+y=1$ 上求静止点．设 $F_1=x^2-xy+y^2-\lambda(x+y-1)$.
解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x}=2x-y-\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y}=2y-x-\lambda=0,\\ \quad x+y=1\end{cases}$$

得静止点 $P_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$. 相应地，$z(P_1)=\frac{1}{4}$.

同法可在另外三条边界线：$x\geqslant 0$，$y\leqslant 0$，$x-y=1$ 上；$x\leqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x-y=-1$ 上；$x\leqslant 0$，$y\leqslant 0$，$x+y=-1$ 上分别求得静止点 $P_2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$P_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$及 $P_4\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$. 相应地，$z(P_2)=z(P_3)=\frac{3}{4}$，$z(P_4)=\frac{1}{4}$.

最后，在上述四条边界线的端点$P_5(1,0)$，$P_6(0,1)$，$P_7(-1,0)$及$P_8(0,-1)$上求得函数值：

$$z(P_5)=z(P_6)=z(P_7)=z(P_8)=1.$$

比较 $z(P_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,8)$，即得

$$\sup z=1,\quad \inf z=0.$$

3678．$u=x^2+2y^2+3z^2$，若 $x^2+y^2+z^2\leqslant 100$.

解　容易求得函数 u 在区域 $x^2+y^2+z^2<100$内的静止点为$P_0(0,0,0)$，而在边界 $x^2+y^2+z^2=100$ 上的静止点为$P_1(10,0,0)$，$P_2(-10,0,0)$，$P_3(0,10,0)$，

$P_4(0,-10,0)$，$P_5(0,0,10)$及$P_6(0,0,-10)$．相应地，$u(P_0)=0$，$u(P_1)=u(P_2)=100$，$u(P_3)=u(P_4)=200$，$u(P_5)=u(P_6)=300$．于是，

$$\sup u=300,\quad \inf u=0.$$

3679．$u=x+y+z$，若 $x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$．

解 所讨论的立体区域由曲面 $x^2+y^2=z$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 和平面 $z=1$，$x^2+y^2\leqslant 1$ 所围成，两个曲面的交线为 $x^2+y^2=z=1$．

显见在立体区域内部无静止点．在边界面$z=1$，$x^2+y^2\leqslant 1$的内部，$u(x,y,1)=x+y+1$ 也无静止点．在边界面 $x^2+y^2=z$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$上，有

$$u=x+y+x^2+y^2\quad (x^2+y^2\leqslant 1).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=1+2x=0,\\[2ex]\dfrac{\partial u}{\partial y}=1+2y=0\end{cases}$$

得静止点 $P_1\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$．相应地，$u(P_1)=-\frac{1}{2}$．

在边界线 $x^2+y^2=z=1$ 上，设

$F(x,y)=x+y+1+\lambda(x^2+y^2-1)$．

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=1+2\lambda x=0,\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial y}=1+2\lambda y=0,\\[2ex]x^2+y^2=1\end{cases}$$

得静止点$P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$及$P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.相应地，$u(P_2)=1+\sqrt{2}$，$u(P_3)=1-\sqrt{2}$. 于是，

$$\sup u=1+\sqrt{2}, \inf u=-\frac{1}{2}.$$

3680. 求函数

$$u=(x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}$$

在域$x>0$，$y>0$，$z>0$内的下确界(inf)与上确界(sup).

解 函数u在区域$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$上是连续函数，因此，把区域扩大包括边界时，上、下确界不变，下面就扩大后的区域加以讨论.

显然当$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$时$u\geqslant 0$，且$u(0,0,0)=0$，故$\inf u=0$.

在区域内部，由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-(x+2y+3z)}[1-(x+y+z)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-(x+2y+3z)}[1-2(x+y+z)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{-(x+2y+3z)}[1-3(x+y+z)],$$

而$e^{-(x+2y+3z)}\neq 0$，故函数u在域内无静止点.

又因

$$u=(x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}=(x+y+z)e^{-(x+y+z)}\cdot e^{-(y+2z)}\leqslant(x+y+z)e^{-(x+y+z)}\to 0\ [(x+y+z)\to+\infty],$$

故函数 u 的最大值必在有限的边界上达到.考虑界面:

$x=0$; $u(0,y,z)=(y+z)e^{-(2y+3z)}$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

$y=0$; $u(x,0,z)=(x+z)e^{-(x+3z)}$, $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

$z=0$; $u(x,y,0)=(x+y)e^{-(x+2y)}$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

同样可证明，这些界面上无静止点.

最后考虑边界线: $x=0$, $y=0$, $z\geqslant 0$,

$$u(0,0,z)=ze^{-3z}$$

可解得静止点 $P_1\left(0,0,\frac{1}{3}\right)$.相应地，$u(P_1)=\frac{1}{3}e^{-1}$.同法在边界线: $x=0$, $z=0$, $y\geqslant 0$ 上可解得静止点 $P_2\left(0,\frac{1}{2},0\right)$;在边界线: $y=0$, $z=0$, $x\geqslant 0$ 上可解得静止点$P_3(1,0,0)$.相应地，$u(P_2)=\frac{1}{2}e^{-1}$, $u(P_3)=e^{-1}$.至于边界线的一端为原点，另一端伸向无穷远，均已讨论过. 于是,

$$\sup u=e^{-1}.$$

3681. 证明: 函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值而无一极小值.

证 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^y)\sin x=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=e^y(\cos x-1-y)=0\end{cases}$$

得 $x=k\pi$, $y=(-1)^k-1$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+e^y)\cos x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^y\sin x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^y(\cos x-2-y),$$

故在点$(2m\pi,0)$ $(m=0,\ \pm1,\ \cdots)$，$A=-2$，$B=0$，$C=-1$及$AC-B^2=2>0$，此时函数z取得极大值；而在点 $((2m+1)\pi,-2)$ $(m=0,\pm1,\cdots)$，$A=1+e^{-2}$，$B=0$，$C=-e^{-2}$及$AC-B^2=-e^{-2}-e^{-4}<0$，此时函数z无极值.

3682. 函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$有极小值的充分条件是否为此函数在沿着过M_0点的每一条直线上有极小值呢？

解 研究函数

$$f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2).$$

对于每一条通过原点的直线：$y=kx$ $(-\infty<x<+\infty)$均有

$$\begin{aligned}f(x,kx)&=(x-k^2x^2)(2x-k^2x^2)\\&=x^2(1-k^2x)(2-k^2x),\end{aligned}$$

当$0<|x|<\frac{1}{k^2}$时，$f(x,kx)>0$．但是$f(0,0)=0$，因此，函数$f(x,y)$在直线$y=kx$上在原点取得极小值零.

对于通过原点的另一条直线：$x=0$，有$f(0,y)=y^4$，故在原点也取得极小值零.

因此，函数$f(x,y)$在一切通过原点的直线上均有极小值．但是，

$$f(a,\sqrt{1.5a})=-0.25a^2<0\ \ (a>0),$$

因此，函数$f(x,y)$在$(0,0)$点不取得极小值。

此例说明：尽管$f(x,y)$在沿着过点M_0的每一条直线上在M_0均有极小值，但却不能保证$f(x,y)$作为二元函数在点M_0一定有极小值.

3683. 分解已知正数a为n个正的因数，使得它们的倒数的和为最小.

解 按题设，我们应求函数$u=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$在条件$a=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i$或$\ln a=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$ $(a>0,\ x_i>0)$下的极值. 设$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u+\lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln a\right)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=-\dfrac{1}{x_i^2}+\dfrac{\lambda}{x_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n),\\ a=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\end{cases}$$

可得$x_i=\frac{1}{\lambda}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 从而解得

$$x_1^0=x_2^0=\cdots=x_n^0=a^{\frac{1}{n}},\ u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=na^{-\frac{1}{n}}.$$

当点$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$趋向于边界时，至少有一个$x_i\to 0$，即$\frac{1}{x_i}\to+\infty$，而$u>\frac{1}{x_i}$，故$u\to+\infty$.

因此，函数u必在区域内部取得最小值. 于是，将正数a分为n个相等的正的因数$a^{\frac{1}{n}}$时，其倒数和$na^{-\frac{1}{n}}$最小.

3684. 分解已知正数a为n个相加数，使得它们的平方和为最小。

解 考虑函数 $u=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 在条件 $a=\sum_{i=1}^{n}x_i\ (a>0)$ 下的极值。设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)$。解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=2x_i+\lambda=0\quad(i=1,2,\cdots,n),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a\end{cases}$$

得 $x_1^0=x_2^0=\cdots=x_n^0=\dfrac{a}{n}$，$u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=\dfrac{a^2}{n}$。

当n个相加数中有若干个相加数$\to\pm\infty$时，平方和$\to+\infty$。因此，函数 u 必在有限区域内取得最小值。于是，将正数 a 分解为 n 个相等的相加数$\dfrac{a}{n}$时，其平方和$\dfrac{a^2}{n}$最小。

3685. 分解已知正数 a 为 n 个正的因数，使得它们的已知正乘幂的和为最小。

解 考虑函数 $u=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$ （$\alpha_i>0$）在条件 $\ln a=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ （$a>0$，$x_i>0$）下的极值。设 $F=u-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln a\right)$。解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\alpha_i x_i^{\alpha_i-1}-\dfrac{\lambda}{x_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,n),&(1)\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=\ln a.&(2)\end{cases}$$

由（1）得$x_i=\left(\frac{\lambda}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}}$.代入（2），得

$$\ln a+\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\alpha_i}{\alpha_i}=\ln\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}.$$

令$\beta=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}$，则有

$$\lambda=a^{\frac{1}{\beta}}\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\beta\alpha_i}}=\left(a\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

$$x_i^0=\frac{\left(a\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{\frac{1}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}}}}{(\alpha_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{\alpha_i}=\beta\lambda=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}\right)\left(a\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}}}.$$

显然，函数u在区域内部达到最小值．于是，所求得的u即为最小值.

3686．已知在平面上的n个质点$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$\cdots$，$P_n(x_n,y_n)$，其质量分别为m_1，$m_2,\cdots,m_n$.

$P(x,y)$点在怎样的位置，这一体系对于此点的转动惯量为最小？

解 设$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}m_i[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]$.解方

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x-x_i) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(y-y_i) = 0 \end{cases}$$

得

$$x_0 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_0 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i,$$

其中 $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$.

当 $x\to\infty$ 或 $y\to\infty$ 时，显然 $f\to+\infty$. 因此，点 $P(x_0, y_0)$即为所求.

3687. 已知容积为 V 的开顶长方浴盆，当其尺寸怎样时，有最小的表面积？

解 设浴盆长、宽、高分别为 x、y、h，则考虑函数 $S=2(x+y)h+xy$ 在条件 $V=xyh$ $(x>0, y>0, h>0)$下的极值.

设 $F(x,y,h)=S-\lambda(xyh-V)$.解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y+2h-\lambda yh = 0, & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x+2h-\lambda xh = 0, & (2) \\ \dfrac{\partial F}{\partial h} = 2(x+y)-\lambda xy = 0, & (3) \\ xyh = V. \end{cases}$$

(1)，(2)，(3) 可改写为

$$\frac{1}{h}+\frac{2}{y}=\lambda=\frac{1}{h}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y},$$

故有

$$x_0=y_0=2h_0=\sqrt[3]{2V}, \quad h_0=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}=\sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

从实际问题的常识可以断定，一定在某一处达到最小。因此，当长宽均为$\sqrt[3]{2V}$，高为$\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$时，浴盆的表面积最小，且最小表面积为 $S=3\sqrt[3]{4V^2}$。

从数学上来考虑，应讨论 x,y,h 趋于边界的情况。当 x,y,h 中有任一个趋于零，例如，$h\to+0$，则由 $V=xyh$ 即可断定 $xy\to+\infty$。但是，$S>xy$，故$S\to+\infty$。当 x,y,h 中有任一个趋于$+\infty$时，一定引起至少有另一个趋于零。重复上面的讨论可知 $S\to+\infty$。因此，连续函数 S 必在区域内部取得最小值。

3688. 横断面为半圆形的圆柱形的张口浴盆，其表面积等于S，当其尺寸怎样时，此盆有最大的容积？

解 设圆柱半径为 r，高为 h，则考虑函数 $V=\frac{1}{2}\pi r^2h$ 在条件 $S=\pi(r^2+rh)(r>0, h>0)$ 下的极值。为简单起见，忽略系数$\frac{1}{2}\pi$。设$F=r^2h-\lambda\left(r^2+rh-\frac{S}{\pi}\right)$。

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial r}=2rh-\lambda(2r+h)=0, \\ \frac{\partial F}{\partial h}=r^2-\lambda r=0, \\ r^2+rh=\frac{S}{\pi}\end{cases}$$

得

$$r_0=\sqrt{\frac{S}{3\pi}},\ h_0=2\sqrt{\frac{S}{3\pi}},$$

从而有$V_0=\frac{1}{2}\pi r_0^2h_0=\sqrt{\frac{S^3}{27\pi^3}}$.

由实际情况知，V一定达到最大体积. 因此，当$h_0=2r_0=2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$时，体积$V_0=\sqrt{\frac{S^3}{27\pi^3}}$最大。

从数学角度看，由$r^2+rh=\frac{S}{\pi}$知r^2和rh恒有界。当$r\to+0$或$h\to+0$时必有$V\to0$。当$h\to+\infty$时，由rh有界可推出$r\to+0$. 因而$V\to0$（显然不可能$r\to+\infty$）。于是，体积V必在区域内部达到最大值.

3689. 在球面$x^2+y^2+z^2=1$上求出一点，这点到n个已知点$M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,\cdots,n)$距离的平方和为最小.

解 考虑函数$u=\sum\limits_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]$在条件$x^2+y^2+z^2=1$下的极值. 设$F(x,y,z)=u-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)-\lambda x\right]=2\left[(n-\lambda)x-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right]\\ \qquad=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2\left[(n-\lambda)y-\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right]=0, & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial z}=2\left[(n-\lambda)z-\sum\limits_{i=1}^{n}z_i\right]=0, & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1. & (4)\end{cases}$$

由（1），（2），（3）得

$$x=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad y=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}y_i,\ z=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}z_i,$$

代入（4），得

$$(n-\lambda)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2=N^2$$

$(N>0)$。于是，得

$$x'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad y'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad z'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i$$

及

$$x''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ y''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad z''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i.$$

从而，

$$u(x',y',z')=\sum_{i=1}^{n}[(x'-x_i)^2+(y'-y_i)^2+(z'-z_i)^2]$$

$$=n(x'^2+y'^2+z'^2)-2x'\sum_{i=1}^{n}x_i-2y'\sum_{i=1}^{n}y_i-2z'\sum_{i=1}^{n}z_i+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$$

$$=n-\frac{2}{N}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$$

$$=n-2N+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2).$$

同法可求得

$$u(x'',y'',z'')=n+2N+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)>u(x',y',z').$$

由于函数 u 在闭球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上连续，故必取得最大值及最小值．于是，当 $x=x'$，$y=y'$，$z=z'$ 时，u 最小（同时也证明了当 $x=x''$，$y=y''$，$z=z''$ 时，u最大）．

3690．由直圆柱及以直圆锥作顶构成一个体．当已知体的全表面积等于 Q 时，求它的尺寸大小，使得体的体积为最大．

解 设圆柱部分的底半径为 R，高为 h；圆锥部分的母线与底面的夹角为 α，则有 $\pi R^2+2\pi Rh+\frac{\pi R^2}{\cos\alpha}=Q$（常数）（$R>0$，$h>0$，$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$）．考虑函数 $V(\alpha,h,R)=\pi R^2h+\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\alpha$ 在上述条件下的极值．设

$$F(\alpha,h,R)=3R^2h+R^3\operatorname{tg}\alpha-\lambda\left(R^2+2Rh+\frac{R^2}{\cos\alpha}-\frac{Q}{\pi}\right).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}=\dfrac{R^3}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\lambda R^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=0, & (1)\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial h}=3R^2-2R\lambda=0, & (2)\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial R}=6Rh+3R^2\operatorname{tg}\alpha-\left(2R+2h+\dfrac{2R}{\cos\alpha}\right)\lambda=0, & (3)\\[2ex] R^2+2Rh+\dfrac{R^2}{\cos\alpha}=\dfrac{Q}{\pi}. & (4)\end{cases}$$

由（2）得 $\lambda=\frac{3}{2}R$. 代入（1），得 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$. 由于 $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$，故由 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ 得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. 代入（3），得

$$6Rh+\frac{6}{\sqrt{5}}R^2=3R^2+3Rh+\frac{9}{\sqrt{5}}R^2,$$

即

$$Rh=R^2+\frac{R^2}{\sqrt{5}} \text{或} h=\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)R.$$

代入（4），得

$$R^2+\left(2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)R^2+\frac{3}{\sqrt{5}}R^2=\frac{Q}{\pi}.$$

于是，

$$R=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$$

相应地，有

$$V_0=\pi R^2h+\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\alpha=\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)\pi R^3$$

$$=\left(1+\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)\pi R^2\cdot R=\frac{3+\sqrt{5}}{3}\pi\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{4}\frac{Q}{\pi}$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{12}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

现在讨论边界情况. 由（4）知 R^2，Rh 及 $\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 均为正的有界量.

(i) 当 $R\to+0$ 时，由 Rh 及 $\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 有界可知

$$V=\pi(Rh)R+\frac{\pi}{3}\left(\frac{R^2}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha\cdot R\to 0.$$

(ii) 当$h\to+0$（所研究的体退化为圆锥）时，需要求当圆锥全表面积$\pi R^2+\frac{\pi R^2}{\cos\alpha}=Q$（常数）时圆锥体积$V=\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\alpha$的最大值.用$l$表圆锥的斜高，即$l=\frac{R}{\cos\alpha}$，$R\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{R^2}{\cos^2\alpha}-R^2}=\sqrt{l^2-R^2}$.

于是，$l=\frac{Q-\pi R^2}{\pi R}$，$V=\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2-R^2}$，故

$$V^2=\frac{1}{9}QR^2(Q-2\pi R^2)\left(0<R<\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\right).$$

由此易知V^2（从而V）当$R^2=\frac{Q}{4\pi}$$\left(\text{即 }R=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\right)$时达最大值,并且最大体积$V_1=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}$.

不难验证$V_1<V_0$.

(iii) 当$h\to+\infty$时，由Rh有界知$R\to+0$.由(i)知$V\to 0$.

(iv) 当$\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$时，由$\frac{R^2}{\cos\alpha}$有界可知$R\to+0$，由(i)知$V\to 0$.

(v) 当$\alpha\to+0$(所研究的体退化为圆柱)时，可以求得达到最大体积的尺寸为$h=2R$及$Q=\sqrt[3]{54\pi V_2^2}$（参看1563题），即

$$V_2=\sqrt{\frac{Q^3}{54\pi}}=\frac{\sqrt{6}}{18}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

不难证明$V_2 < V_0$.

综上所述，我们得到当$R=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$，$\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$时，所研究的体积$V$达到最大值

$$V_0=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{12}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

3691. 一个体，其体积等于V，形为直角平行直六面体，上底及下底为正的四角锥.当角锥的侧面对它们的底成怎样的倾角，体的全表面积为最小？

解 设长方体两底（正方形）边长为a，高为h，棱锥侧面与底面的夹角为α，则$V=a^2h+\frac{1}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha$. 考虑函数$S=4ah+\frac{2a^2}{\cos\alpha}$在上述条件下的极值. 设$F=S-\lambda\left(a^2h+\frac{1}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha-V\right)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial a}=4h+\frac{4a}{\cos\alpha}-2\lambda ah-\lambda a^2\operatorname{tg}\alpha=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial h}=4a-\lambda a^2=0, & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}=\frac{2a^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\lambda a^3}{3\cos^2\alpha}=0, & (3)\\ a^2h+\frac{1}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha=V. & (4)\end{cases}$$

由（2），（3）可得$\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$. 同3690题进一步可求出$a$和$h$.

类似3687题的讨论，当$a\to+0$，$a\to+\infty$，$h\to+\infty$，$\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$等情况均能证明$S\to+\infty$. 对于边

界为 $\alpha=0$ 及 $h=0$ 这两种退化情况，类似 3690 题，可证明此时的全表面积比 $\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$ 时的全表面积为大。于是，当 $\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$ 时，体的全表面积最小。

3692. 已知矩形的周长为 $2p$，将它绕其一边旋转而构成一体积，求所得体积为最大的那个矩形。

解 设矩形的边长为 x 及 y，则考虑函数 $V=\pi y^2 x$ 在条件 $x+y=p$ 下的极值。设 $F=V-\lambda(x+y-p)$。解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\pi y^2-\lambda=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2\pi xy-\lambda=0, \\ x+y=p\end{cases}$$

得 $x=\frac{p}{3}$，$y=\frac{2p}{3}$。

由于在边界上，一边为零，一边为 p，推出 $V=0$。于是，当矩形的两边分别为 $\frac{p}{3}$ 及 $\frac{2p}{3}$ 时，旋转体的体积最大。

3693. 已知三角形的周长为 $2p$，求出这样的三角形，当它绕着自己的一边旋转所构成的体积最大。

解 如图6·43所示，以 AC 为轴旋转，取参数：高 h 及二角 α、β。考虑函数

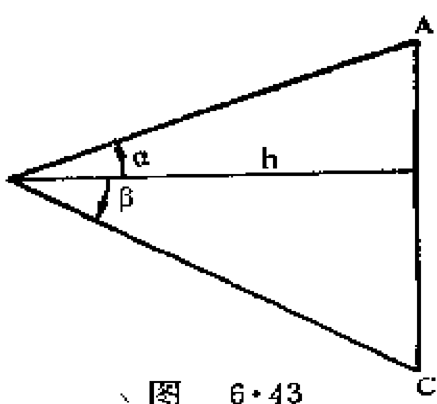


图 6·43

$$V=\frac{1}{3}\pi h^3(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\,\beta)$$

在条件$\frac{h}{\cos\alpha}+\frac{h}{\cos\beta}+h(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta)=2p$下的极值．为计算简单起见，略去常数$\frac{1}{3}\pi$．设 $F=h^3(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)-\lambda\left(\frac{h}{\cos\alpha}+\frac{h}{\cos\beta}+h\mathrm{tg}\alpha+h\mathrm{tg}\,\beta-2p\right)$.

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial h}=3h^2(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)-\lambda\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right.\\ \qquad\left.+\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta\right)=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial\alpha}=\frac{h^3}{\cos^2\alpha}-\lambda h\left(\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=0, & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial\beta}=\frac{h^3}{\cos^2\beta}-\lambda h\left(\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\beta}\right)=0, & (3)\\ h\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta\right)=2p. & (4)\end{cases}$$

由（2）及（3）得 $\alpha=\beta$ 及 $\lambda=\frac{h^2}{1+\sin\alpha}=\frac{h^2}{1+\sin\beta}$.

代入（1）式，得 $\sin\alpha=\sin\beta=\frac{1}{3}$．于是，$h\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{h}{3\cos\alpha}$，代入（4）式，即得$\frac{h}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}p$. 从而，得三边分别为

$$AB=BC=\frac{3}{4}p,\ AC=2h\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{p}{2}.$$

讨论边界情况．当 $h\to+0$ 或 $h\to p$ 时，显然有

$V\to 0$. 对于二角 α 及 β 必有大小限制：$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\alpha\leqslant\beta\leqslant\alpha$（注意$\alpha,\beta$ 的方向规定不同），当 $\alpha\to+0$ 或 $\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$ 或 $\beta\to-\alpha$ 时，同样均有 $V\to 0$. 于是，当三角形的三边长分别为$\frac{p}{2}$，$\frac{3p}{4}$及$\frac{3p}{4}$，并绕长为$\frac{p}{2}$的边旋转时，所得的体积最大。

3694. 在半径为 R 的半球内嵌入有最大体积的直角平行六面体。

解 不妨设此长方体的一个底面与半球所在的底面重合，另外四个顶点在半球球面上，且半球面在直角坐标系下的方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geqslant 0.$$

又设长方体的长、宽、高分别为 $2x$ $2y$及 z（$x>0$，$y>0$，$z>0$）. 考虑函数 $V=4xyz$ 在上述条件下的极值. 设 $F=xyz-\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$.

解方程組

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=yz-2\lambda x=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}=xz-2\lambda y=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial z}=xy-2\lambda z=0,\\[2mm] x^2+y^2+z^2=R^2\end{cases}$$

可得 $x=y=z=\frac{R}{\sqrt{3}}$.

由于在边界上(即 $x\to+0$ 或 $y\to+0$ 或 $z\to+0$ 时)显然 $V\to 0$，故当直角平行六面体的长、宽、高为 $\frac{2R}{\sqrt{3}}$，$\frac{2R}{\sqrt{3}}$ 及 $\frac{R}{\sqrt{3}}$ 时，其体积最大.

3695. 在已知的直圆锥内嵌入有最大体积的直角平行六面体.

解 不妨设直圆锥的底面半径为 R，高为 H，且长方体的一个面与直圆锥的底面重合，两个边长为 $2x$ 和 $2y$，四个顶点在直圆锥面上，高为 z. 过直圆锥的高和长方体底面的对角线作一截面，如图6·44所示，则 $CD=H$，$EK=FG=z$，$AD=R$，$DE=\sqrt{x^2+y^2}$，$(H-z)R=H\cdot\sqrt{x^2+y^2}$（$R$、$H$ 为常数）.考虑函数 $V=4xyz$ 在上述条件下的极值（$x>0$，$y>0$，$z>0$）.为计算简单计，略去常数4.设

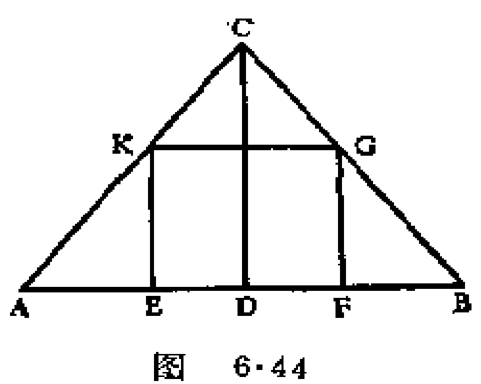


图 6·44

$$F=xyz-\lambda[H\sqrt{x^2+y^2}-(H-z)R].$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=yz-\dfrac{\lambda Hx}{\sqrt{x^2+y^2}}=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=xz-\dfrac{\lambda Hy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=xy-\lambda R=0, & (3)\\ (H-z)R=H\sqrt{x^2+y^2}. & (4) \end{cases}$$

由(1)、(2)得$x=y$，代入(3)，得$x=y=\sqrt{\lambda R}$。又由(1)可得$z=\frac{\lambda H}{\sqrt{2\lambda R}}$. 将$x,y,z$代入(4)得

$$H-\frac{\lambda H}{\sqrt{2\lambda R}}=\frac{H}{R}\sqrt{2\lambda R},$$

解之得 $\lambda=\frac{2}{9}R$，从而有

$$x=y=\frac{\sqrt{2}}{3}R,\ z=\frac{1}{3}H;\ V=\frac{\sqrt{2}}{36}R^2H.$$

显然，在所论区域的边界上（即$x\to+0$或$y\to+0$或$z\to+0$时），有$V\to 0$，故当直角平行六面体的高等于$\frac{1}{3}$圆锥的高时，其体积最大。

3696. 在椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

内嵌入有最大体积的直角平行六面体。

解 此直角平行六面体的对称中心为原点. 设其一个顶点为(x,y,z)，则按题意，我们应考虑函数$V=8xyz$在条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$下的极值. 为计算简单计，略去常数8. 设$F=xyz-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}-1\right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = yz - 2\lambda \cdot \dfrac{x}{a^2} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = xz - 2\lambda \cdot \dfrac{y}{b^2} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = xy - 2\lambda \cdot \dfrac{z}{c^2} = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

得 $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$，这时 $V = \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot abc > 0$.

现在讨论边界情况．当 $x \to a - 0$，$y \to b - 0$，$z \to c - 0$ 中有任一个成立时，则另两个变量必皆趋于零；又若 x, y, z 中有一个趋于零时，则体积 V 趋于零．总之，在边界上，恒有 $V \to 0$．于是，具有最大体积的直角平行六面体的长、宽、高分别为 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$，$\frac{2b}{\sqrt{3}}$，$\frac{2c}{\sqrt{3}}$.

3697. 直圆锥的母线 l 与底平面成倾角 α．试在此直圆锥中嵌入具最大全表面积的直角平行六面体．

解 设圆锥的底半径为 R，高为 H，则有 $R = l\cos\alpha$，$H = l\sin\alpha$，$\frac{H}{R} = \operatorname{tg}\alpha$．内接长方体的放置方法与3695题相同．设底面的两边分别为 $2d\cos\theta$ 和 $2d\sin\theta$，高为 h，则 $0 < d < R$，$0 < h < H$，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，且 h、

d 由条件 $\frac{H-h}{H}=\frac{d}{R}$ 约束，此条件可改写为

$$d\cdot\operatorname{tg}\alpha+h=H=l\sin\alpha.$$

所求的全表面积为

$$S=4(d^2\sin2\theta+dh\sin\theta+dh\cos\theta).$$

(i) 固定 d 和 h，考虑 $S=S(\theta)$ 的变化情况。由一元函数极值求法，不难断定，仅有 $S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$。$S(\theta)$ 在 $\frac{\pi}{4}$ 处达到最大值 $S=4(d^2+\sqrt{2}dh)$，即底面为正方形时，S 才取得最大值. 因此，原问题可化为在条件 $d\cdot\operatorname{tg}\alpha+h=l\sin\alpha$ $(d>0, h>0)$ 下，求函数 $S=4(d^2+\sqrt{2}dh)$ 的极值.

(ii) 此问题的边界值：当 $d\to+0$（此时 $h\to H-0$）时，显然 $S\to0$；而当 $h\to+0$（这时 $d\to R-0$）时，$S\to4R^2$. 在后一种情况下，全表面积退化为上、下两个正方形面积之和.

(iii) 在区域内部，设

$$F=4(d^2+\sqrt{2}dh)-\lambda(d\cdot\operatorname{tg}\alpha+h-l\sin\alpha).$$

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial d}=8d+4\sqrt{2}h-\lambda\operatorname{tg}\alpha=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial h}=4\sqrt{2}d-\lambda=0, & (2)\\ d\cdot\operatorname{tg}\alpha+h=l\sin\alpha. & (3)\end{cases}$$

由 (2) 得 $\lambda=4\sqrt{2}d$，代入 (1)，得

$$h=(\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2})d. \tag{4}$$

由 $h>0$ 及 $d>0$ 知，当 $\operatorname{tg}\alpha\leqslant\sqrt{2}$ 时，方程组在所研究的区域内无解．此时，S 的最大值必在边界上达到，即在 $h\to+0$ 时达到 $4R^2$．当 $\operatorname{tg}\alpha>\sqrt{2}$ 时，将（4）式代入（3）式，可得

$$d=\frac{l\sin\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}},\quad h=l\sin\alpha\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}.$$

此时

$$S=4(d^2+\sqrt{2}dh)=\frac{2l^2\sin^2\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha-1}=\frac{2R^2\operatorname{tg}^2\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha-1}.$$

由于 $(\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2})^2=\operatorname{tg}^2\alpha-2(\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha-1)>0$，故 $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha-1}>2$．从而，$S>4R^2$，即在该点的值大于边界上的值．因此，它为最大值．于是，当 $\operatorname{tg}\alpha>\sqrt{2}$，长方体底面为正方形，边长为 $2d\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{l\sin\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha-1}$，高 $h=l\sin\alpha\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}$ 时，全表面积为最大．

3698．在椭圆抛物面 $\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$，$z=c$ 的一段中嵌入有最大体积的直角平行六面体．

解 设长方体的长、宽、高为 $2x$，$2y$ 及 $h=c-z$，则按题设考虑函数 $V=4xyh=4xy(c-z)$ 在条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$（$x>0$，$y>0$，$0<z<c$）下的极值．为计算简单起见，作 F 时略去常数 4．令 $F=xy(c-z)-\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z}{c}\right)$．

解方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial x}=y(c-z)-2\lambda\cdot\dfrac{x}{a^2}=0, & (1)\\
\dfrac{\partial F}{\partial y}=x(c-z)-2\lambda\cdot\dfrac{y}{b^2}=0, & (2)\\
\dfrac{\partial F}{\partial z}=-xy+\dfrac{\lambda}{c}=0, & (3)\\
\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}. & (4)
\end{cases}
$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以x、y、$(c-z)$，比较即得$\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{c-z}{2c}$. 代入（4）式，可得

$$
x=\frac{a}{2},\quad y=\frac{b}{2},\quad z=\frac{c}{2},\ h=c-z=\frac{c}{2}.
$$

由于边界上V趋于零，故长方体的最大值必在区域内达到。于是，当平行六面体的尺寸为a、b及$\frac{c}{2}$时，其体积最大。

3699. 求点$M_0(x_0,y_0,z_0)$至平面$Ax+By+Cz+D=0$的最短距离.

解 按题设，我们应求函数

$$
r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2
$$

在条件$Ax+By+Cz+D=0$下的极值。设

$$
F(x,y,z)=r^2+\lambda(Ax+By+Cz+D),
$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2(x-x_0)+\lambda A=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2(y-y_0)+\lambda B=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2(z-z_0)+\lambda C=0, & (3)\\ Ax+By+Cz+D=0. & (4)\end{cases}$$

由（1），（2），（3）可得

$$x=x_0-\frac{1}{2}\lambda A,\ y=y_0-\frac{1}{2}\lambda B,\ z=z_0-\frac{1}{2}\lambda C. \quad (5)$$

代入（4），得

$$\lambda=\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}, \quad (6)$$

将（5），（6）代入 $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ 中，得

$$r=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

当 x,y,z 中有任一个趋于无穷时，r 趋于无穷。因此，在区域内 r 必取最小值.

于是，点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 至平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的最短距离为

$$r=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3700．求空间二直线

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

和

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

之间的最短距离。

解 显然，当两直线不平行时，直线上一点趋于无穷远处时，与另一直线上各点的距离，都趋于无穷。因此，不平行两直线的最短距离必在有限处达到。

为了书写简洁，我们采用向量的表达形式。用 $\vec{r}_1(t)=\vec{l}_1 t+\vec{r}_{10}$ 表示直线 $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，(1)

$\vec{r}_2(s)=\vec{l}_2 s+\vec{r}_{20}$ 表示直线 $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，(2)

其中 t，s 为参数，$\vec{l}_1=\{m_1, n_1, p_1\}$，$\vec{l}_2=\{m_2, n_2, p_2\}$，$\vec{r}_{10}=\{x_1, y_1, z_1\}$，$\vec{r}_{20}=\{x_2, y_2, z_2\}$。

又记

$$\vec{r}_0=\vec{r}_{10}-\vec{r}_{20}=\{x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2\}.$$

始端在直线（2）上，终端在直线（1）上的向量为：

$$\begin{aligned}\vec{u}(t,s)&=(\vec{l}_1 t+\vec{r}_{10})-(\vec{l}_2 s+\vec{r}_{20})\\&=\vec{l}_1 t-\vec{l}_2 s+\vec{r}_0. \end{aligned}\tag{3}$$

本题即求 $|\vec{u}(t,s)|$ 的最小值，它必在有限的 t，s 上取得。令

$$\begin{aligned}w&=|\vec{u}(t,s)|^2=|\vec{l}_1 t-\vec{l}_2 s+\vec{r}_0|^2\\&=l_1^2t^2+l_2^2s^2+r_0^2-2(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)st+2(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)t\\&\quad-2(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)s,\end{aligned}$$

其中 $l_1^2=\vec{l}_1\cdot\vec{l}_1$，$l_2^2=\vec{l}_2\cdot\vec{l}_2$，$r_0^2=\vec{r}_0\cdot\vec{r}_0$。

w 取得极值的必要条件为

$$\frac{\partial w}{\partial t}=2[l_1^2 t-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)s+(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)]=0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=2[l_2^2 s-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)t-(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)]=0.$$

由此可解得唯一的静止点 (t_0,s_0):

$$t_0=-\frac{l_2^2(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)}{l_1^2\,l_2^2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)^2},$$

$$s_0=\frac{l_1^2(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)}{l_1^2\,l_2^2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)^2}.$$

于是 $|\vec{u}(t_0,s_0)|$ 即为所求的最短距离.下面计算 $|\vec{u}(t_0,s_0)|$. 令 $\Delta=\sqrt{l_1^2 l_2^2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)^2}$, 显然有

$$\Delta^2=|\vec{l}_1|^2\cdot|\vec{l}_2|^2-[|\vec{l}_1|\cdot|\vec{l}_2|\cos(\widehat{\vec{l}_1,\vec{l}_2})]^2$$

$$=|\vec{l}_1|^2\cdot|\vec{l}_2|^2\sin^2(\widehat{\vec{l}_1,\vec{l}_2})=|\vec{l}_1\times\vec{l}_2|^2,$$

即

$$\Delta=|\vec{l}_1\times\vec{l}_2|.$$

将 t_0 及 s_0 代入(3)式,得

$$\vec{u}(t_0,s_0)=-\frac{1}{\Delta^2}(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)[l_2^2\vec{l}_1-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)\vec{l}_2]$$

$$-\frac{1}{\Delta^2}(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)[l_1^2\vec{l}_2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)\vec{l}_1]+\vec{r}_0.$$

通过计算,不难得出

$$\vec{u}(t_0,s_0)\cdot\vec{l}_1=-\frac{1}{\Delta^2}(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)[l_2^2\,l_1^2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)^2]-\frac{1}{\Delta^2}$$

$$\cdot(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)[l_1^2(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)l_1^2]+(\vec{r}_0\cdot\vec{l}_1)=0,$$

$\vec{u}(t_0,s_0)\cdot\vec{l}_2=0$.

因此，得知

$$\vec{u}(t_0,s_0)/\!/\vec{l}_1\times\vec{l}_2.$$

令$\vec{n}_0=\dfrac{\vec{l}_1\times\vec{l}_2}{\varDelta}$，则$|\vec{n}_0|=1$,

$$|\vec{u}(t_0,s_0)|=|\vec{u}(t_0,s_0)\cdot\vec{n}_0|=\frac{|\vec{r}_2\cdot(\vec{l}_1\times\vec{l}_2)|}{\varDelta}$$

$$=\pm\frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & m_2 & p_2\end{vmatrix},$$

其中

$$\varDelta=\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & p_1\\ n_2 & p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1 & m_1\\ p_2 & m_2\end{vmatrix}^2},$$

且正负号的选取保证所得结果为正值。

2701．求抛物线$y=x^2$和直线$x-y-2=0$之间的最短距离．

解 设(x_1,y_1)为抛物线$y=x^2$上任一点，(x_2,y_2)为直线$x-y-2=0$上的任一点．按题意，我们应求函数

$$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

在条件$y_1-x_1^2=0$及$x_2-y_2-2=0$下的极值．显然，由几何知，当两点(x_1,y_1)和(x_2,y_2)至少有一伸向无穷时，r也必趋于无穷大，故r的最小值必在有限处达到．

设$F(x_1,x_2,y_1,y_2)=r^2+\lambda_1(y_1-x_1^2)+\lambda_2(x_2-y_2$

$-2)$.

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}=-2(x_2-x_1)-2\lambda_1 x_1=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=2(x_2-x_1)+\lambda_2=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_1}=-2(y_2-y_1)+\lambda_1=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_2}=2(y_2-y_1)-\lambda_2=0, \\ y_1=x_1^2, \\ x_2-y_2-2=0 \end{cases}$$

得唯一的一组解 $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{1}{4}$; $x_2=\frac{11}{8}$, $y_2=-\frac{5}{8}$.

于是，所求的最短距离为

$$r_0=\sqrt{\left(\frac{11}{8}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{7}{8}\sqrt{2}.$$

3702. 求有心二次曲线

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$$

的半轴.

解 设 (x_0,y_0) 为二次曲线 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 上的点，则 $(-x_0,-y_0)$ 也为该曲线上的点。因此，原点$(0,0)$即为曲线的中心。按题意，应求函数 $u=x^2+y^2$ 在条件 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 下的极值. 设 $F=x^2+y^2-\lambda(Ax^2+2Bxy+Cy^2-1)$.

解方程组

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}=(\lambda A-1)x+\lambda By=0, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\lambda Bx+(\lambda C-1)y=0, \\ Ax^2+2Bxy+Cy^2=1. \end{cases}$$

要方程组有非零解，λ 必须满足二次方程

$$\begin{vmatrix} \lambda A-1 & \lambda B \\ \lambda B & \lambda C-1 \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

由题设知二次曲线为有心的，因此 $AC^2-B^2\neq 0$.
由方程（1）可求得两根 λ_1 和 λ_2（$\lambda_1\geqslant\lambda_2$）.将 λ 的值代入方程组，求得对应于 λ_1 的解（x_1, y_1）及对应于 λ_2 的解（x_2, y_2）.相应地，有

$$\begin{aligned} u(x_1,y_1)=x_1^2+y_1^2&=x_1[\lambda_1(Ax_1+By_1)] \\ &+y_1[\lambda_1(Bx_1+Cy_1)] \\ &=\lambda_1(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2)=\lambda_1, \end{aligned}$$

同理 $u(x_2,y_2)=x_2^2+y_2^2=\lambda_2$.

(i) 当 $AC-B^2>0$ 且 $A+C>0$（或 $A>0$）时，由（1）解得

$$\lambda_i=\frac{(A+C)\pm\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2(AC-B^2)}>0,$$

即有 $\lambda_1\geqslant\lambda_2>0$. 显然 u 的最大值及最小值必在区域内达到. 因此，λ_1 及 λ_2 分别为 u 的最大值及最小值. 此时，所对应的曲线为椭圆，长、短半轴的平方分别为 λ_1 及 λ_2. 当 $\lambda_1=\lambda_2$ （$A=C, B=0$）时为圆.

当$A+C<0$（或$A<0$）时，两根λ_i均为负，相应曲线无轨迹.

(ii)当$AC-B^2<0$时，$\lambda_1>0$，$\lambda_2<0$.此时只有一个极值λ_1. 对应的曲线为双曲线. λ_1为实半轴的平方(λ_2表面上无意义，但实质上为虚半轴的平方)，其中特别是$B=0$时，曲线退化为一对相交直线.

3703. 求有心二次曲面

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1$$

的半轴.

解 同上题可知，曲面的中心为(0，0，0).按题意，达到曲面半轴的点(x,y,z)一定是函数$u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在条件

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1$$

下的静止点（但不一定是极值点. 例如，椭球面的中间轴所在的点）. 设

$$F=u-\lambda(Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz-1).$$

解方程组

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}=(\lambda A-1)x+\lambda Dy+\lambda Fz=0, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\lambda Dx+(\lambda B-1)y+\lambda Ez=0, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial z}=\lambda Fx+\lambda Ey+(\lambda C-1)z=0, \\ Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1. \end{cases}$$

上述方程组要有非零解，λ 必须满足三次方程

$$\begin{vmatrix} \lambda A-1 & \lambda D & \lambda F \\ \lambda D & \lambda B-1 & \lambda E \\ \lambda F & \lambda E & \lambda C-1 \end{vmatrix}=0.$$

设三根为 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$. 对应于此三根可求出满足方程组的静止点。与3702题相同，可证明在这些静止点处 $u(x,y,z)$ 的值恰为 $\lambda_i(i=1,2,3)$，即 λ_i 为曲面半轴的平方（严格地说，当 $\lambda_i<0$ 时不能认为它是半轴的平方）。

与二次曲线的情况类似，根据 λ_i 的正负可讨论曲面半轴的虚、实等问题，这对熟悉二次曲面分类的读者无实质性的困难，因此省略掉这些烦琐的讨论。

3704. 求用平面

$$Ax+By+Cz=0$$

与圆柱

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

相交所成椭圆的面积.

解 我们只要确定所得椭圆的长短半轴 $\overline{a}$ 及 $\overline{b}$，即可按公式 $S=\pi\overline{a}\overline{b}$ 求得椭圆的面积.

注意到原点 (0,0,0) 在原椭圆柱面的中心轴上，且截平面 $Ax+By+Cz=0$ 又通过它. 因此，原点是截线椭圆的中心，从而长短半轴 $\overline{a}$ 及 $\overline{b}$ 的平方 $\overline{a}^2$ 及 $\overline{b}^2$，分别为函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $Ax+By+Cz=0$ 及 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 下的最大值和最小值. 设

$$F=u+2\lambda(Ax+By+Cz)-\mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

于是，达到最大值、最小值的点的坐标必须满足方程组

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\left(1-\dfrac{\mu}{a^2}\right)x+\lambda A=0, & (1) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\left(1-\dfrac{\mu}{b^2}\right)y+\lambda B=0, & (2) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial z}=z+\lambda C=0, & (3) \\ Ax+By+Cz=0, & (4) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1. & (5) \end{cases}$$

将（1）、（2）、（3）三式分别乘以 x、y、z后，然后相加，得$x^2+y^2+z^2=\mu$，即从方程组可解得 $u(x,y,z)=\mu$. 由（1）、（2）、（3）、（4）知，若要 x,y,z 及 λ 不全为零，μ必须满足下列方程（同时 μ 只要满足下列方程，静止点(x, y, z)也一定有解）：

$$\begin{vmatrix} 1-\dfrac{\mu}{a^2} & 0 & 0 & A \\ 0 & 1-\dfrac{\mu}{b^2} & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}=0.$$

展开后，得

$$\frac{C^2}{a^2b^2}\mu^2-\left(\frac{B^2}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}+\frac{C^2}{a^2}+\frac{C^2}{b^2}\right)\mu$$

$$+(A^2+B^2+C^2)=0.$$

此方程有两正根．显然即为最大值及最小值$\bar{a}^2$、$\bar{b}^2$．由韦达定理知

$$\bar{a}^2\bar{b}^2=\frac{a^2b^2(A^2+B^2+C^2)}{C^2},$$

故椭圆面积$\pi\bar{a}\bar{b}=\frac{\pi ab\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}\quad(C\neq 0)$．

当$C=0$时，平面$Ax+By=0$过Oz轴，显然得不到椭圆截面．

3705．求用平面

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$$

（其中$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$）与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

相截所成截面的面积．

解 截面为一椭圆．与3704题一样，我们只要先考虑函数$u=x^2+y^2+z^2$在条件

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0\text{ 及 }\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

下的极值（$a>0$，$b>0$，$c>0$）．设

$$F=u+2\lambda_1(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)-\lambda_2\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\Big).$$

解方程组

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}=\left(1-\frac{\lambda_2}{a^2}\right)x+\lambda_1\cos\alpha=0, & (1)\\
\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}=\left(1-\frac{\lambda_2}{b^2}\right)y+\lambda_1\cos\beta=0, & (2)\\
\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z}=\left(1-\frac{\lambda_2}{c^2}\right)z+\lambda_1\cos\gamma=0, & (3)\\
x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0, & (4)\\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. & (5)
\end{cases}
$$

将(1),(2),(3)三式分别乘以x,y,z,然后相加,即得

$$u=x^2+y^2+z^2=\lambda_2.$$

由(1)、(2)、(3)、(4)知,若要x、y、z及λ_1不全为零,λ_2必须满足下列方程

$$
\begin{vmatrix}
1-\frac{\lambda_2}{a^2} & 0 & 0 & \cos\alpha\\
0 & 1-\frac{\lambda_2}{b^2} & 0 & \cos\beta\\
0 & 0 & 1-\frac{\lambda_2}{c^2} & \cos\gamma\\
\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0
\end{vmatrix}=0.
$$

展开整理得

$$
\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)\lambda_2^2-\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2}+\frac{\cos^2\alpha}{c^2}\right.
$$

$$
\left.+\frac{\cos^2\beta}{c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right)\lambda_2+1=0.
$$

此方程有两正根，显然即为椭圆的长短半轴的平方 $\bar{a}^2$、$\bar{b}^2$。由韦达定理知

$$\bar{a}^2\bar{b}^2=\frac{a^2b^2c^2}{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}.$$

于是，所求椭圆的面积为

$$S=\pi\bar{a}\bar{b}=\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}}.$$

3706. 根据飞耳马原则，从 A 点射出而达于 B 点的光线，沿着需要最短时间的曲线传播.

假定点 A 和点 B 位于以平面所分开的不同的光介质中，并且光散播的速度在第一介质中等于 v_1，而在第二介质中等于 v_2，推出光的折射定律.

解 如图6·45所示，光线从 A 点射出，沿着折线 AMB 到达 B 点. 由 A、B 作垂直于 l 的直线 AC 及 BD，并与直线 l 交于 C 点及 D 点. 设 $AC=a$，$BD=b$，$CD=d$. 选择角度 α,β 为变量，则

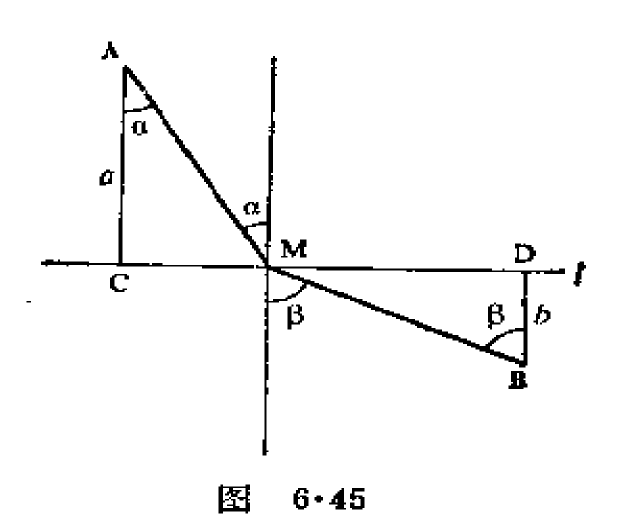


图 6·45

$$AM=\frac{a}{\cos\alpha},\ BM=\frac{b}{\cos\beta},$$

$$CM=a\operatorname{tg}\alpha,\ MD=b\operatorname{tg}\beta.$$

于是，我们的问题就是求函数

$$f(\alpha,\beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$$

在条件 $a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=d$ 下的最小值，其中$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$（当$M$在$C$与$D$之间时，$\alpha>0$，$\beta>0$；当$M$在$C$点的左边时，$\alpha<0$，$\beta>0$；当$M$在点$D$的右边时，$\alpha>0$，$\beta<0$）．显然$f(\alpha,\beta)$是连续函数；又当$\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$时（这时点$M$从右边伸向无穷远，$\beta\to-\frac{\pi}{2}+0$），显然$f(\alpha,\beta)\to+\infty$；当$\alpha\to-\frac{\pi}{2}+0$时(这时点$M$从左边伸向无穷远，$\beta\to\frac{\pi}{2}-0$)，显然也有$f(\alpha,\beta)\to+\infty$．由此可知$f(\alpha,\beta)$在有限处达到最小值，此处必为静止点．设

$$F=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}-\lambda(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta-d).$$

注意到由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}=\dfrac{a\sin\alpha}{v_1\cos^2\alpha}-\dfrac{\lambda a}{\cos^2\alpha}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial\beta}=\dfrac{b\sin\beta}{v_2\cos^2\beta}-\dfrac{\lambda b}{\cos^2\beta}=0,\end{cases}$$

即得

$$\frac{\sin\alpha}{v_1}=\lambda,\quad\frac{\sin\beta}{v_2}=\lambda.$$

于是，在静止点必满足

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}.$$

由此可知，光的传播路径必满足上面的关系．这就是著名的光线折射定律．此时，由点A到点B的光线传播所需要的时间最短．

3707．当投射角怎样时，光线的折射（即投射线与出射线之间的角）为最小？（此光线经过棱镜的折射角为α，折射系数为n）．求出此最小的折射．

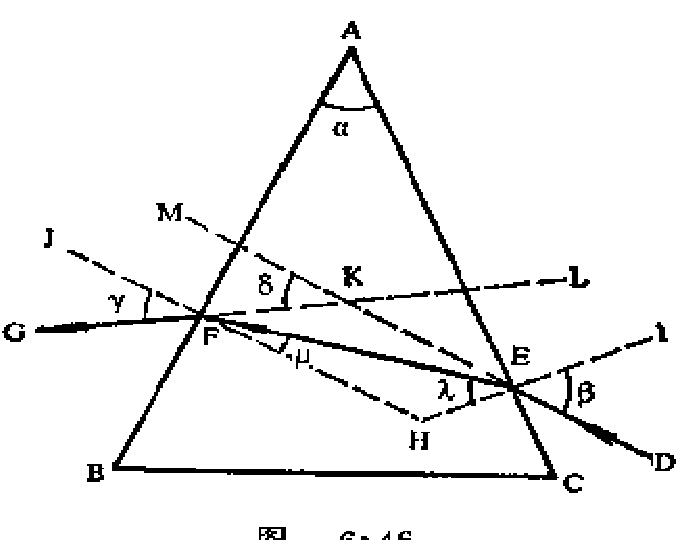


图 6·46

解 如图6·46所示，ABC为棱镜．$\angle BAC=\alpha$为棱镜顶角（即棱镜的折射角），DE为入射光线，折射后从F点折射出棱镜，射出线为FG．IH和JH分别为入射点和射出点的法线，它们相交于H（$IH\perp AC$，$JH\perp AB$）．入射线DE的延长线DM与射出线的反向延长线FL交于K．令$\angle DEI=\beta$，$\angle GFJ=\gamma$，$\angle GKM=\delta$，$\angle HEF=\lambda$，$\angle EFH=\mu$．

按题意即问：当β在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$之间的一定范围内变化时，$\delta$何时达到极小值．这本是一元函数的极值问题，然因牵涉的变量关系太多，因此把它看作多元函数的条件极值问题．

由折射定律（3706题）可知：

$$\sin\beta = n\sin\lambda, \qquad (1)$$

$$\sin\gamma = n\sin\mu. \qquad (2)$$

由几何关系不难求出 α、β、γ、δ、λ 及 μ 之间的关系：

$$\lambda + \mu = \alpha, \qquad (3)$$

$$\delta = \beta + \gamma - \alpha. \qquad (4)$$

由于α为常数，故从(1)、(2)、(3)、(4)四式中消去 λ、μ 及 γ 就得到 δ 作为 β 的函数. 令

$$F(\beta,\gamma,\lambda,\mu) = \beta + \gamma - \alpha + k_1(\sin\beta - n\sin\lambda) + k_2(n\sin\mu - \sin\gamma) + k_3(\lambda + \mu - \alpha).$$

静止点适合下列方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = 1 + k_1\cos\beta = 0, & (5) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \gamma} = 1 - k_2\cos\gamma = 0, & (6) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -k_1 n\cos\lambda + k_3 = 0, & (7) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu} = k_2 n\cos\mu + k_3 = 0. & (8) \end{cases}$$

由(7)、(8)消去 k_3，得 $k_1\cos\lambda = -k_2\cos\mu$. (9)

由(5)、(6)得 $k_1 = -\dfrac{1}{\cos\beta}$, $k_2 = \dfrac{1}{\cos\gamma}$. 代入(9)，两边平方，即得

$$\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\beta} = \frac{\cos^2\mu}{\cos^2\gamma} \text{ 或 } \frac{1-\sin^2\lambda}{1-\sin^2\beta} = \frac{1-\sin^2\mu}{1-\sin^2\gamma}. \qquad (10)$$

将(1)、(2)代入(10)，得

$$\frac{1-\sin^2\lambda}{1-n^2\sin^2\lambda} = \frac{1-\sin^2\mu}{1-n^2\sin^2\mu},$$

整理后得

$$(n^2-1)(\sin^2\lambda-\sin^2\mu)=0.$$

由于 $0<\lambda<\frac{\pi}{2}$， $0<\mu<\frac{\pi}{2}$，故$\sin\lambda=\sin\mu$或$\lambda=\mu$.

代入(3)，得 $\lambda=\mu=\frac{\alpha}{2}$. 从而$\beta=\gamma=\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

于是，

$$\delta=\beta+\gamma-\alpha=2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha.$$

所求得的 β 即为唯一的静止点.

根据物理知识，作为本题所讨论的对象：顶角较小的分光棱镜，在区域内确实存在着最小的折射. 于是，当入射角

$$\beta=\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

时，则

$$\delta=2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha$$

应为最小折射. 至于作其它用途的各种棱镜，光线的折射路径不仅与顶角有关，而且大都与整个棱镜的构造有关，这已不属于本题所考虑的对象，因而也不再对它们进行讨论.

3708. 变量 x 和 y 满足线性方程式

$$y=ax+b,$$

它的系数需要确定. 由于一系列的等精确测定的结果，对于量 x 和 y 得到值 x_i，y_i $(i=1,2,\cdots,n)$.

利用最小二乘方的方法，求系数 a 和 b 的最可靠数值.

解 根据最小二乘方的方法，系数 a 和 b 的最可靠数

值是这样的：对于它们，误差的平方和

$$M=\sum_{i=1}^{n}(ax_i-b-y_i)^2$$

为最小．因此，上述问题可以通过求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0\,,\\[2ex]\dfrac{\partial M}{\partial b}=2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0\end{cases}$$

的解来解决．记

$$[x,y]=\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i,\quad [x,x]=\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

$$[x,1]=\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad [y,1]=\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

则上述方程组化为

$$\begin{cases}a[x,x]+b[x,1]=[x,y],\\ a[x,1]+bn=[y,1].\end{cases}$$

系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}[x,x] & [x,1]\\ [x,1] & n\end{vmatrix}=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

$$=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i\neq j}x_i\,x_j=\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)^2.$$

当$\Delta\neq 0$时，方程组有唯一的一组解，且

$$a=\frac{\begin{vmatrix}[x,y] & [x,1]\\ [y,1] & n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[x,x] & [x,1]\\ [x,1] & n\end{vmatrix}}=\frac{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{\displaystyle\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)^2}$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}[x,x] & [x,y]\\ [x,1] & [y,1]\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[x,x] & [x,1]\\ [x,1] & n\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2}.$$

显然，此时 M 为最小。因此，上述a和b即为所求。

3709. 在平面上已知 n 个点$M_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ 在怎样的位置时，已知点与此直线的偏差的平方和为最小？

解 已知点与直线的偏差平方和

$$M(\alpha,p)=\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)^2.$$

记

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

$$\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i,\quad \overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\quad \overline{y^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2,$$

则所求直线的参数 α 和 p 应满足方程

$$\frac{\partial M}{\partial\alpha}=2\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)(y_i\cos\alpha-x_i\sin\alpha)$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\Big[x_i y_i\cos2\alpha+(y_i^2-x_i^2)\frac{\sin2\alpha}{2}$$

$$-y_i p\cos\alpha+x_i p\sin\alpha\Big]$$

$$=n[2\,\overline{xy}\cos2\alpha+(\overline{y^2}-\overline{x^2})\sin2\alpha-2p(\overline{y}\cos\alpha$$

$$-\overline{x}\sin\alpha)]=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial p}=-2\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)$$

$$=-2n(\bar{x}\cos\alpha+\bar{y}\sin\alpha-p)=0. \qquad (2)$$

由(2)式，解得

$$p=\bar{x}\cos\alpha+\bar{y}\sin\alpha. \qquad (3)$$

将(3)式代入(1)式，即可解出

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2(\bar{x}\cdot\bar{y}-\overline{xy})}{[\overline{x^2}-(\bar{x})^2][\overline{y^2}-(\bar{y})^2]}^{*)}. \qquad (4)$$

在$[0,2\pi)$范围内，(4)式的解α共有四个：

$$\alpha_0;\ \alpha_0+\frac{\pi}{2};\ \alpha_0+\pi;\ \alpha_0+\frac{3\pi}{2};$$

其中$0\leqslant\alpha_0<\frac{\pi}{2}$. 将这四个解代入(3)式可以求出$p$.

根据习惯，取$p\geqslant 0$，故上述四个α只有两个满足$p\geqslant 0$的要求**). 记为α_1,p_1; α_2, p_2. 这样就得到两条互相垂直的直线：

$$\begin{cases} x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0, & (5)\\ x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0. & (6)\end{cases}$$

显然，$M(\alpha,p)$一定在p为有限值的点上取得最小值. 因此，只要比较$M(\alpha_1,p_1)$和$M(\alpha_2,p_2)$的值，M较小的那条直线即为所求***).

*) 当(4)式分母为零而分子不为零时，解为$2\alpha=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2}$. 当分子分母同时为零时，有无穷多个解，即任意一条过n个点的重心的直线均使$M(\alpha,$

p)为最小，具体的讨论不进行了.

**) 也可能同时有一对或两对 α 使 $p=0$，但此时代表的直线仍只有互相垂直的两条，只是直线方程(5)或(6)有两种不同的表示法而已.

***) 特殊情况下也可能有$M(\alpha_1,p_1)=M(\alpha_2,p_2)$，此时使$M$取得最小值的直线有两条.

3710. 在区间(1,3)内用线性函数 $ax+b$，来近似地代替函数 x^2，使得绝对偏差

$$\Delta=\sup|x^2-(ax+b)| \quad (1\leqslant x\leqslant 3)$$

为最小.

解 考虑函数

$$u(a,b)=\Delta^2=\sup_{1\leqslant x\leqslant 3}[x^2-(ax+b)]^2,$$

$$f(x,a,b)=x^2-(ax+b).$$

由于$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-a$，故当固定$a,b$时，$f(x,a,b)$ 只在 $x=\frac{a}{2}$处达到极值 $f\left(\frac{a}{2},a,b\right)$. 当限制 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，只有当$2<a<6$ 时，$f(x,a,b)$ 才可能在 $1<x<3$ 内部达到极值. 于是，

$$u(a,b)=\begin{cases}\max\left\{f^2(1,a,b),f^2(3,a,b),\ f^2\left(\frac{a}{2},a,b\right)\right\}, & 2<a<6;\\ \max\{f^2(1,a,b),f^2(3,a,b)\}, & a\leqslant 2\text{或}a\geqslant 6.\end{cases}$$

从上式得知，对一切(a,b)均有$u(a,b)>0$.

设从上式已解出平面区域 Ω_1,Ω_2及Ω_3，使得

$$u(a,b)=\begin{cases} f^2(1,a,b)=(1-a-b)^2,(a,b)\in\Omega_1; \\ f^2(3,a,b)=(9-3a-b)^2,(a,b)\in\Omega_2; \\ f^2\left(\frac{a}{2},a,b\right)=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2,\ (a,b)\in\Omega_3, \\ \quad 2<a<6. \end{cases}$$

由于 $u(a,b)>0$，不难看出 $u(a,b)$在区域 Ω_i $(i=1,2,3)$内部均无静止点．再看区域边界的状况．以 Ω_1及 Ω_3的边界为例，根据 $u(a,b)$的连续性，即知在边界上有 $u(a,b)=(1-a-b)^2$，且满足条件

$$(1-a-b)^2=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2.$$

下面我们求满足条件极值的必要条件的点．设

$$F(a,b)=(1-a-b)^2+\lambda\left[(1-a-b)^2-\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2\right],$$

则

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a}=-2(1+\lambda)(1-a-b)-\lambda a\left(\frac{a^2}{4}+b\right), \\ \frac{\partial F}{\partial b}=-2(1+\lambda)(1-a-b)-2\lambda\left(\frac{a^2}{4}+b\right). \end{cases}$$

使 $\frac{\partial F}{\partial a}=0$，$\frac{\partial F}{\partial b}=0$ 且满足条件 $1-a-b\neq 0$，$\frac{a^2}{4}+b\neq 0$ 的点没有．

同法可证：在 Ω_1，Ω_2 及 Ω_2，Ω_3 的边界上也无静止点．但是，$u(a,b)$一定在区域内达到最小值．因此，只能在 Ω_1，Ω_2，Ω_3 的边界交点上取得最小值，即在满足方程

$$(1-a-b)^2=(9-3a-b)^2=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2 \qquad (1)$$

的点(a,b)上取得最小值.方程(1)可转化为下面四组方程

$$\begin{cases} 1-a-b=9-3a-b=-\left(\frac{a^2}{4}+b\right), & (2) \\ 1-a-b=9-3a-b=\frac{a^2}{4}+b, & (3) \\ 1-a-b=-(9-3a-b)=-\left(\frac{a^2}{4}+b\right), & (4) \\ 1-a-b=-(9-3a-b)=\frac{a^2}{4}+b. & (5) \end{cases}$$

方程组（2）无解.

方程组(3)的解为$a=4$，$b=-\frac{7}{2}$. 对应的$\Delta=\frac{1}{2}$.

方程组(4)的解为$a=2$,$b=1$. 对应的$\Delta=2$.

方程组(5)的解为$a=6$,$b=-7$. 对应的$\Delta=2$.

综上所述，可知：在区间$(1,3)$内，用线性函数$4x-\frac{7}{2}$来近似地代替函数x^2，即可使绝对偏差Δ为最小，且$\Delta_{\min}=\frac{1}{2}$.

第七章　带参数的积分

§1．带参数的常义积分

1° 积分的连续性　若函数 $f(x, y)$ 于有界的域 R〔$a \leqslant x \leqslant A$; $b \leqslant y \leqslant B$〕内有定义并且是连续的，则

$$F(y) = \int_a^A f(x, y)\,dx$$

是在闭区间 $b \leqslant y \leqslant B$ 上的连续函数．

2° 积分符号下的微分法　若除在1°中所已指明的条件之外，并且偏导函数 $f'_y(x, y)$ 在区域 R 内连续，则当 $b < y < B$ 时莱布尼兹公式

$$\frac{d}{dy}\int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A f'_y(x, y)\,dx$$

为真．

在更普遍的情况下，当积分的限为参数 y 的可微分函数 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$ 并且当 $b < y < B$ 时 $a \leqslant \varphi(y) \leqslant A$，$a \leqslant \psi(y) \leqslant A$，有：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx\\ &= f[\psi(y), y]\psi'(y) - f[\varphi(y), y]\varphi'(y)\\ &\quad + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\,dx \quad (b < y < B)\ .\end{aligned}$$

3° 积分符号下的积分法　在 1° 的条件下有

$$\int_b^B dy\int_a^A f(x,y)\,dx=\int_a^A dx\int_b^B f(x,y)\,dy.$$

3711. 证明：不连续函数 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$ 的积分

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx$$

为连续函数. 作出函数 $u=F(y)$ 的图形.

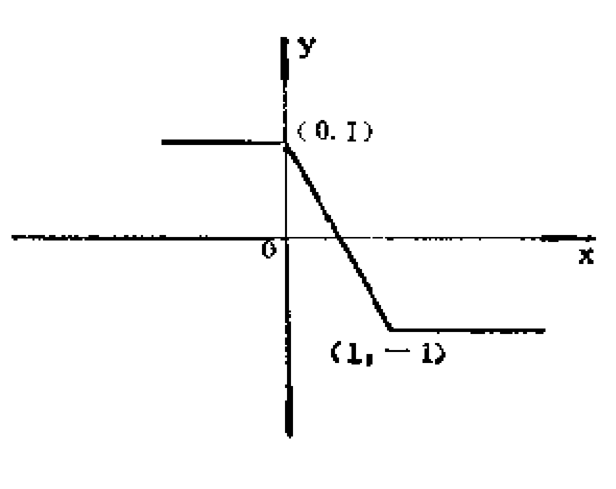


图 7·1

证　当 $-\infty<y<0$ 时,

$$F(y)=\int_0^1 1\cdot dx=1;$$

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时,

$$F(y)=\int_0^y(-1)\,dx+\int_y^1 1\cdot dx=1-2y;$$

当 $1<y<+\infty$ 时,

$$F(y)=\int_0^1(-1)\,dx=-1.$$

由于

$$\lim_{y\to+0}F(y)=\lim_{y\to+0}(1-2y)=1,\quad \lim_{y\to-0}F(y)=1$$

且 $F(0)=1$，即有

$$F(+0)=F(-0)=F(0),$$

故 $u=F(y)$ 当 $y=0$ 时为连续的.

同法可证 $u=F(y)$ 当 $y=1$ 时为连续的. 当 $y\neq 0$, $y\neq 1$ 时, $u=F(y)$ 显然连续. 于是, $u=F(y)$ 在整个 Oy 轴上均为连续的. 如图7·1所示.

3712. 研究函数

$$F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$$

的连续性, 其中 $f(x)$在闭区间[0,1]上是正的连续函数.

解 当 $y\neq 0$ 时, 被积函数是连续的. 因此, $F(y)$ 为连续函数.

当 $y=0$ 时, 显然有 $F(0)=0$.

当 $y>0$ 时, 设 m 为 $f(x)$ 在[0,1]上的最小值, 则 $m>0$.由于

$$F(y)\geqslant m\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx=m\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}$$

及

$$\lim_{y\to+0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2},$$

故有

$$\varliminf_{y\to+0}F(y)\geqslant\frac{m\pi}{2}>0.$$

于是, $F(y)$当 $y=0$ 时不连续.

3713. 求:

(a) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$;

(б) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$;

(в) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos\alpha x\,dx$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

解 (a) 因 $\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$，α，$1+\alpha$ 都是连续函数，故含参变量 α 的积分 $F(\alpha)=\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$ 是 α 在 $-\infty<\alpha<+\infty$ 上的连续函数，因此

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}F(\alpha)=F(0)=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

(б) 同样，$F(\alpha)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$ 是 $-\infty<\alpha<+\infty$ 上的连续函数，因此

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}F(\alpha)=F(0)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}dx$$

$$=2\int_0^1 x\,dx=1.$$

(в) 同样，$F(\alpha)=\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$ 是 $-\infty<\alpha<+\infty$上的连续函数，故

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}F(\alpha)=F(0)=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}.$$

(г) 考虑二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1 \text{ 时；}\\[2ex] \dfrac{1}{1+e^x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\ y=0 \text{ 时.}\end{cases}$$

由 $\lim\limits_{u\to+0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=c$ 易知 $f(x,y)$是 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上的连续函数．从而积分 $F(y)=\int_0^1 f(x,y)dx$ 是 $0\leqslant y\leqslant 1$ 上的连续函数，因此

$$\lim_{y\to+0}F(y)=F(0),$$

从而更有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} F\left(\frac{1}{n}\right)=F(0)=\int_0^1 f(x,0)dx$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}=\ln\frac{e^x}{1+e^x}\Big|_0^1=\ln\frac{2e}{1+e}.$$

3714. 设函数 $f(x)$在闭区间$[a, A]$上连续．证明

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt=f(x)-f(a)$$

$$(a<x<A).$$

证 由于 $f(x)$在$[a, A]$上连续，故在$[a, A]$上存在原函数．于是，

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\left[F(x+h)-F(a+h)-F(x)+F(a)\right]$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to+0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

$$=F'(x)-F'(a)=f(x)-f(a).$$

3715. 在下式中可否于积分符号下完成极限运算

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx\ ?$$

解 不能．事实上，

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\Big|_0^1\right)$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{y^2}}\right)=\frac{1}{2},$$

而

$$\int_0^1\left(\lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\right)dx=\int_0^1 0\cdot dx=0.$$

3716．当 $y=0$ 时，可否根据莱布尼兹法则计算函数

$$F(y)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

的导数?

解 不能．事实上，我们有：当 $y\neq 0$时，

$$\begin{aligned}F(y)&=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\\&=x\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1}\\&\quad-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\\&=\ln\sqrt{1+y^2}-\int_0^1\left(1-\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)dx\\&=\ln\sqrt{1+y^2}-1+y\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}.\end{aligned}$$

又有

$$F(0)=\int_0^1 \ln x\,dx=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 dx=-1.$$

由此可知

$$F'_+(0)=\lim_{y\to+0}\frac{F(y)-F(0)}{y}$$

$$=\lim_{y\to+0}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y}+\operatorname{arctg}\frac{1}{y}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2},$$

$$F'_-(0)=\lim_{y\to-0}\frac{F(y)-F(0)}{y}$$

$$=\lim_{y\to-0}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y}+\operatorname{arctg}\frac{1}{y}\right]$$

$$=-\frac{\pi}{2},$$

故 $F'(0)$不存在.

另一方面，当 $x>0$ 时，

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}$$

$$=\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}\equiv 0,$$

故

$$\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}dx=0.$$

由此可知，当 $y=0$ 时不能在积分号下求导数，就是求右导数或求左导数也不行，因为

$$F'_+(0)=\frac{\pi}{2}\neq 0$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}dx,$$

$$F'_{-}(0)=-\frac{\pi}{2}\neq 0$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}dx.$$

3717．若

$$F(x)=\int_x^{x^2}e^{-xy^2}dy,$$

计算 $F'(x)$．

解 $$F'(x)=\frac{d}{dx}(x^2)\cdot e^{-xy^2}\Big|_{y=x^2}-\frac{dx}{dx}\cdot e^{-xy^2}\Big|_{y=x}+\int_x^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(e^{-xy^2})dy$$

$$=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int_x^{x^2}y^2e^{-xy^2}dy.$$

3718．设：

(a) $F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$；

(б) $F(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$；

(в) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$；

(г) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(x+\alpha,\ x-\alpha)dx$；

(д) $F(\alpha)=\int_{0}^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2)dy$,

求 $F'(\alpha)$.

解 (а) $F'(\alpha)=-\sin\alpha\cdot e^{\alpha|\sin\alpha|}-\cos\alpha\cdot e^{\alpha|\cos\alpha|}$

$$+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

(б) $F'(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha(b+\alpha)}{b+\alpha}-\dfrac{\sin\alpha(a+\alpha)}{a+\alpha}$

$$+\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\cos\alpha x\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+\alpha}\right)\sin\alpha(b+\alpha)$$

$$-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a+\alpha}\right)\sin\alpha(a+\alpha).$$

(в) $F'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)+\int_{0}^{\alpha}\dfrac{1}{1+\alpha x}dx$

$$=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2).$$

(г) 设 $u=x+\alpha$, $v=x-\alpha$, 则

$$F(\alpha)=\int_{0}^{\alpha}f(u,v)dx.$$

于是,

$$F'(\alpha)=f(2\alpha,0)+\int_{0}^{\alpha}[f'_u(u,v)-f'_v(u,v)]dx$$

$$=f(2\alpha,0)+2\int_{0}^{\alpha}f'_u(u,v)dx$$

$$-\int_0^a [f'_u(u,v)+f'_v(u,v)]dx$$

$$=f(2a,\ 0)+2\int_0^a f'_u(u,v)dx$$

$$-\int_0^a \frac{d}{dx} f(u,v)dx$$

$$=f(2a,\ 0)+2\int_0^a f'_u(u,v)dx$$

$$-f(x+a,\ x-a)\Big|_{x=0}^{x=a}$$

$$=f(2a,\ 0)+2\int_0^a f'_u(u,v)dx$$

$$-[f(2a,0)-f(a,-a)]$$

$$=f(a,\ -a)+2\int_0^a f'_u(u,v)dx.$$

(Д) $F'(a)=2a\int_{a^2-a}^{a^2+a}\sin(a^4+y^2-a^2)dy$

$$+\int_0^{a^2}\left[\frac{\partial}{\partial a}\int_{x-a}^{x+a}\sin(x^2+y^2-a^2)dy\right]dx$$

$$=2a\int_{a^2-a}^{a^2+a}\sin(a^4+y^2-a^2)dy$$

$$+\int_0^{a^2}\Big\{\sin[x^2+(x+a)^2-a^2]$$

$$-\sin[x^2+(x-a)^2-a^2]\cdot(-1)$$

$$+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(-2\alpha)\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy\Big\}\,dx$$

$$=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\,dy$$

$$+\int_0^{\alpha^2}\Big\{\sin(2x^2+2\alpha x)+\sin(2x^2-2\alpha x)$$

$$+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(-2\alpha)\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy\Big\}\,dx$$

$$=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\,dy$$

$$+2\int_0^{\alpha^2}\sin 2x^2\cos 2\alpha x\,dx$$

$$-2\alpha\int_0^{\alpha^2}dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy.$$

3719．若

$$F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)\,dy,$$

其中 $f(x)$ 为可微分的函数，求 $F''(x)$。

解 $F'(x)=2xf(x)+\int_0^x f(y)\,dy$,

$$F''(x)=2f(x)+2xf'(x)+f(x)$$
$$=3f(x)+2xf'(x).$$

3720．设：

$$F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|\,dy,$$

其中 $a<b$ 及 $f(y)$ 为可微分的函数，求 $F''(x)$。

解 当 $x\in(a,b)$ 时，由于

$$F(x)=\int_a^x (x-y)f(y)dy+\int_x^b (y-x)f(y)dy,$$

故有

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x (x-y)f(y)dy$$

$$-\frac{d}{dx}\int_b^x (y-x)f(y)dy$$

$$=\int_a^x \frac{\partial}{\partial x}[(x-y)f(y)]dy$$

$$-\int_b^x \frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]dy$$

$$=\int_a^x f(y)\,dy+\int_b^x f(y)dy,$$

$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x).$$

当 $x\,\overline{\in}\,(a,b)$时，例如 $x\leqslant a$，则

$$F(x)=\int_a^b (y-x)f(y)dy,$$

故有

$$F'(x)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]dy$$

$$=-\int_a^b f(y)dy,$$

$$F''(x)=0;$$

同理，对于 $x\geqslant b$ 也可得 $F''(x)=0$．总之，

$$F''(x)=\begin{cases}2f(x), & \text{当 } x\in(a,\ b);\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in}(a,\ b).\end{cases}$$

3721. 设:

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta\quad(h>0),$$

其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $F''(x)$.

解 $F(x)=\dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_0^h d\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta$

$$=\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_{x+\xi}^{x+\xi+h}f(u)du.$$

于是,

$$F'(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_{x+\xi}^{x+\xi+h}f(u)du\right]d\xi$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_0^h[f(x+\xi+h)-f(x+\xi)]d\xi$$

$$=\frac{1}{h^2}\left[\int_{x+h}^{x+2h}f(u)du-\int_x^{x+h}f(u)du\right],$$

$$F''(x)=\frac{1}{h^2}[f(x+2h)-f(x+h)-f(x+h)$$

$$+f(x)]$$

$$=\frac{1}{h^2}[f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)].$$

3722. 设:

$$F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt,$$

求 $F^{(n)}(x)$。

解 $F'(x)=\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}[f(t)(x-t)^{n-1}]dt$

$$=(n-1)\int_0^x f(t)(x-t)^{n-2}dt,$$

$$F''(x)=(n-1)(n-2)\int_0^x f(t)(x-t)^{n-3}dt,$$

....

$$F^{(n-1)}(x)=(n-1)!\int_0^x f(t)dt,$$

最后得

$$F^{(n)}(x)=(n-1)!f(x).$$

3723. 在区间 $1\leqslant x\leqslant 3$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似地代替 函数 $f(x)=x^2$，使得

$$\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx=\min.$$

解 设 $F(a, b)=\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx$，则由于 $F(a, b)$ 是 a 和 b 的二元连续函数，并且易知当 $r=\sqrt{a^2+b^2}\to+\infty$时，$F(a,b)\to+\infty$，故 $F(a,b)$ 必在有限处取得最小值．解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial a}=2\int_1^3(a+bx-x^2)dx=4a+8b-\frac{52}{3}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial b}=2\int_1^3 x(a+bx-x^2)dx=8a+\frac{52}{3}b-40=0\end{cases}$$

得唯一的一组解 $a=-\frac{11}{3}$，$b=4$.

于是，当 $a=-\frac{11}{3}$，$b=4$ 时 $F(a,\ b)$ 达最小值，即所求的线性函数为 $4x-\frac{11}{3}$。

3724. 依条件：函数 $a+bx$ 及 $\sqrt{1+x^2}$ 在已知区间〔0，1〕上的平均平方差为最小，求近似公式

$$\sqrt{1+x^2}\approx a+bx\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

解 按题设，即在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似代替函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，使得

$$\int_0^1(a+bx-\sqrt{1+x^2})^2dx=\min.$$

设 $F(a,\ b)=\int_0^1(a+bx-\sqrt{1+x^2})^2dx$，则 $F(a,b)$ 是 a 和 b 的二元连续函数，并且易知当 $r=\sqrt{a^2+b^2}\to+\infty$ 时，$F(a,b)\to+\infty$，故 $F(a,b)$ 必在有限处取得最小值．解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a}=2\int_0^1(a+bx-\sqrt{1+x^2})dx\\ \qquad=2a+b-[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial b}=2\int_0^1 x(a+bx-\sqrt{1+x^2})dx\\ \qquad=a+\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)=0\end{cases}$$

得唯一的一组解 $a\approx0.934$，$b\approx0.427$。

于是，当 $a\approx 0.934$，$b\approx 0.427$时，$F(a,b)$为最小值，即所求的近似公式为

$$\sqrt{1+x^2}\approx 0.934+0.427x \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

3725. 求完全椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

及

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (0<k<1)$$

的导函数并以函数 $E(k)$ 和 $F(k)$ 来表示它们。

证明 $E(k)$满足微分方程式

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

解 $E'(k)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$

$$=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\varphi)-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$$

$$=\frac{1}{k}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]$$

$$=\frac{E(k)-F(k)}{k}. \qquad (1)$$

$$F'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$$

$$=-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\varphi)-1}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$$

$$=-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

我们易证

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{1-k^2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{k^2}{1-k^2}\ \frac{d}{d\varphi}[\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}],$$

故有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi$$

$$=\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi.$$

于是，

$$F'(k)=-\frac{F(k)}{k}+\frac{E(k)}{k(1-k^2)}. \qquad (2)$$

由（1）式，对 k 再求导数，并注意到（2）式，即

得

$$E''(k)=\frac{[E'(k)-F'(k)]k-[E(k)-F(k)]}{k^2}$$

$$=\frac{\left[\frac{E(k)-F(k)}{k}+\frac{F(k)}{k}-\frac{E(k)}{k(1-k^2)}\right]k-kE'(k)}{k^2}$$

$$=-\frac{E(k)}{1-k^2}-\frac{E'(k)}{k},$$

即

$$E''(k)+\frac{E'(k)}{k}+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

3726. 证明：足指数 n 为整数的贝塞尔函数

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi$$

满足贝塞尔方程式

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

证 $J_n'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi\cdot\sin(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi,$

$$J_n''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\cdot\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi.$$

于是，

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(x^2\sin^2\varphi+n^2-x^2)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)$$

$$-x\sin\varphi\cdot\sin(n\varphi-x\sin\varphi)]d\varphi$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(n^2-x^2\cos^2\varphi)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)$$

$$-x\sin\varphi\cdot\sin(n\varphi-x\sin\varphi)]d\varphi$$

$$=-\frac{1}{\pi}(n+x\cos\varphi)\cdot\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\Big|_0^{\pi}=0,$$

本题获证。

3727．设：

$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}},$$

其中函数 $\varphi(x)$ 及其导函数 $\varphi'(x)$ 在闭区间 $0\leqslant x\leqslant a$ 上连续．

证明：当 $0<\alpha<a$ 时有

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^{\alpha}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx.$$

证 当 $x=\alpha$ 时，一般说来被积函数变成无穷，所以我们不能直接在积分号下求导数．设 $x=\alpha t$，则此积分变成以下形式

$$I(\alpha)=\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}dt.$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ 在 $[0,1]$ 上绝对可积，故可利用积分号下求导数的公式．于是，

$$I'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}dt$$

$$+\sqrt{\alpha}\int_0^1 \frac{t\varphi'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}dt.$$

再将 $x=\alpha t$ 代入上式，得

$$I'(\alpha)=\frac{1}{2\alpha}\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx. \quad (1)$$

利用分部积分法可得

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\varphi(0)+\frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha \sqrt{\alpha-x}\,\varphi'(x)dx. \quad (2)$$

另一方面，又有

$$\int_0^\alpha \frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx$$

$$=-\int_0^\alpha \sqrt{\alpha-x}\,\varphi'(x)dx$$

$$+\alpha\int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx. \quad (3)$$

将（2）式及（3）式代入（1）式，最后得

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx.$$

3728. 设有函数

$$u(x)=\int_0^1 K(x,y)v(y)dy,$$

其中

$$K(x, y)=\begin{cases} x(1-y), & 若 x\leqslant y; \\ y(1-x), & 若 x>y, \end{cases}$$

及 $v(y)$都是连续的．证明已知函数满足方程式

$$u''(x)=-v(x) \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

证 由题设得

$$u(x)=\int_0^x y(1-x)v(y)dy + \int_x^1 x(1-y)v(y)dy.$$

于是，求导数即得

$$u'(x)=x(1-x)v(x)-\int_0^x y\,v(y)dy - x(1-x)v(x)+\int_x^1 (1-y)v(y)dy$$

$$=-\int_0^x y\,v(y)\,dy+\int_x^1 (1-y)v(y)dy,$$

$$u''(x)=-x\,v(x)-(1-x)v(x)=-v(x),$$

所以，函数 $u(x)$满足方程

$$u''(x)=-v(x) \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

3729．设：

$$F(x,y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy} (x-yz)f(z)dz,$$

其中 $f(z)$为可微分的函数，求 $F''_{xy}(x,y)$。

解 $F'_x(x,y)=y(x-xy^2)f(xy)+\int_{\frac{x}{y}}^{xy}f(z)dz,$

$$\begin{aligned}F''_{xy}(x,y)&=(x-xy^2)f(xy)\\&\quad+y\cdot(-2xy)f(xy)\\&\quad+y(x-xy^2)f'(xy)\cdot x\\&\quad+xf(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)\\&=x(2-3y^2)f(xy)\\&\quad+x^2y(1-y^2)f'(xy)\\&\quad+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right).\end{aligned}$$

3730．设 $f(x)$ 为可微分两次的函数及 $F(x)$ 为可微分的函数．证明：函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz$$

满足弦振动的方程式

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

及初值条件：$u(x,0)=f(x)$，$u'_t(x,0)=F(x)$．

证 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}[-af'(x-at)+af'(x+at)]$

$$+\frac{1}{2}F(x+at)+\frac{1}{2}F(x-at),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}[a^2 f''(x-at)+a^2 f''(x+at)]$$

$$+\frac{a}{2}F'(x+at)-\frac{a}{2}F'(x-at). \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}[f'(x-at)+f'(x+at)]$$

$$+\frac{1}{2a}F(x+at)-\frac{1}{2a}F(x-at),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]$$

$$+\frac{1}{2a}F'(x+at)-\frac{1}{2a}F'(x-at). (2)$$

比较（1）式及（2）式，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

此外，还有

$$u(x, 0)=\frac{1}{2}[f(x-0\cdot t)+f(x+0\cdot t)]$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-0\cdot t}^{x+0\cdot t}F(z)dz=f(x),$$

$$u_t'(x, 0)=\frac{1}{2}[-a f'(x)+a f'(x)]$$

$$+\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}F(x)=F(x).$$

本题获证.

3731. 证明：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, l]$ 上连续及当 $0 \leqslant \xi \leqslant l$ 时 $(x-\xi)^2+y^2+z^2 \neq 0$，则函数

$$u(x,y,z)=\int_0^l \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}$$

满足拉普拉斯方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

证 利用积分号下的求导法则，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\int_0^l \frac{2(x-\xi)f(\xi)d\xi}{2[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\int_0^l \frac{(x-\xi)f(\xi)d\xi}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_0^l \frac{f(\xi)\cdot[2(x-\xi)^2-y^2-z^2]}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}d\xi. \quad (1)$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\int_0^l \frac{f(\xi)\cdot[-(x-\xi)^2+2y^2-z^2]}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}d\xi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\int_0^l \frac{f(\xi)\cdot[-(x-\xi)^2-y^2+2z^2]}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}d\xi. \quad (3)$$

将（1）、（2）、（3）三式相加，即证得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

应用对参数的微分法，计算下列积分：

3732. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$.

解 将b视为常数，a视为参变量．令

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx.$$

先设$a>0$，$b>0$．我们有

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x-b^2\cos^2x}dx;$$

若$a=b$，有$I'(b)=\frac{2}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx=\frac{\pi}{2b}$.

若$a\neq b$，则作代换$t=\operatorname{tg}x$，得

$$I'(a)=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(t^2+1)\left(t^2+\frac{b^2}{a^2}\right)}$$

$$=\frac{2}{a}\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\operatorname{arc\,tg}t\right.$$

$$\left.-\frac{b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{at}{b}\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{a+b}.$$

因此

$$I'(a)=\frac{\pi}{a+b}\qquad(0<a<+\infty).$$

积分之，得

$$I(a)=\pi\ln(a+b)+C\quad(0<a<+\infty),$$

其中 C 为某常数．令 $a=b$，得

$$I(b)=\pi\ln 2b+C,$$

而 $I(b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln b^2dx=\pi\ln b$，代入，解之，得

$C=\pi\ln\frac{1}{2}$．于是，

$$I(a)=\pi\ln(a+b)+\pi\ln\frac{1}{2}$$

$$=\pi\ln\frac{a+b}{2}\quad(0<a<+\infty).$$

若 $a<0$ 或 $b<0$，则可化为 $a>0$ 且 $b>0$ 的情形，得

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(|a|^2\sin^2x+|b|^2\cos^2x)dx$$

$$=I(|a|)=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

于是，不论 a，b 是正是负，在任何情形，均有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

3733． $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$．

解 设 $I(a)=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x-a^2)dx$. 当 $|a|<1$ 时，由于 $1-2a\cos x+a^2\geqslant 1-2|a|+a^2=(1-|a|)^2>0$，故 $\ln(1-2a\cos x-a^2)$ 为连续函数且具有连续导数，从而可在积分号下求导数．将 $I(a)$ 对 a 求导数，得

$$I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{-2\cos x+2a}{1-2a\cos x+a^2}dx$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\left(1+\frac{a^2-1}{1-2a\cos x+a^2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a}\int_0^{\pi}\frac{dx}{(1+a^2)-2a\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\left(\frac{-2a}{1+a^2}\right)\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+a}{1-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}\ {}^{*)}$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\cdot\frac{\pi}{2}=0.$$

于是，当 $|a|<1$ 时，$I(a)=C$（常数）．但是，$I(0)=0$，故 $C=0$．从而 $I(a)=0$．

当 $|a|>1$ 时，令 $b=\frac{1}{a}$，则 $|b|<1$，并有

$$I(b)=0.$$

于是，我们有

$$I(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(\frac{b^2-2b\cos x+1}{b^2}\right)dx$$

$$=I(b)-2\pi\ln|b|$$

$$=-2\pi\ln|b|=2\pi\ln|a|.$$

当$|a|=1$时，

$$I(1)=\int_0^{\pi}\ln 2(1-\cos x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\ln 4+2\ln\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=2\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt$$

$$=2\pi\ln 2+4\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)^{**)}$$

$$=0;$$

同法可求得 $I(-1)=0$.

总上所述，故知

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$$

$$=\begin{cases}0, & 当|a|\leqslant 1;\\ 2\pi\ln|a|, & 当|a|>1.\end{cases}$$

*) 利用2028题(a)的结果.

**) 利用2353题(a)的结果.

3734. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arc\,tg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx.$

解 令 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,a)\,dx$，其中 $f(x,a)=\frac{\operatorname{arc\,tg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}$。本来 $f(x,a)$ 在 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 时无定义，但因 $\lim\limits_{x\to+0} f(x,a)=a$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x,a)=0$，故若补充定义 $f(0,a)=a$，$f\left(\frac{\pi}{2},a\right)=0$，则 $f(x,a)$ 为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$-\infty<a<+\infty$ 上的连续函数。

又当 $0<x<\frac{\pi}{2}$，$-\infty<a<+\infty$ 时，

$$f'_a(x,a)=\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{\operatorname{tg}x}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}$$

$$=\frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}.$$

而按规定 $f(0,a)=a$，$f\left(\frac{\pi}{2},a\right)=0$，故

$$f'_a(0,a)=1,\quad f'_a\left(\frac{\pi}{2},a\right)=0.$$

由此可知

$$f'_a(x,a)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}, & \text{当 } 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\ -\infty<a<+\infty\text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } x=\dfrac{\pi}{2},\ -\infty<a<+\infty\text{ 时。}\end{cases}$$

显然 $f_a(x,a)$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0<a<+\infty$上连续，

在 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$-\infty<a<0$ 上也连续（注意，在点

$x=\frac{\pi}{2}$，$a=0$ 不连续），故由积分号下求导数法则知

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}$$

$$(0<a<+\infty\text{或}-\infty<a<0).$$

作代换 $\operatorname{tg}x=t$，得（当$a^2\neq1$时）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$$

$$=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{a^2}{a^2t^2+1}\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{2(1+|a|)}.$$

若 $a^2=1$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx=\frac{\pi}{4}.$$

总之，有

$$I'(a)=\frac{\pi}{2(1+|a|)}$$

$$(0<a<+\infty\text{或}-\infty<a<0).$$

积分之，得

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)+C_1\quad(0<a<+\infty),$$

$$I(a)=-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)+C_2\quad(-\infty<a<0),$$

其中 C_1，C_2是两个常数．由于上面已述 $f(x, a)$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$-\infty<a<+\infty$上连续，故 $I(a)$ 在$-\infty<a<+\infty$上连续，因此 $\lim\limits_{a\to 0+0}I(a)=\lim\limits_{a\to 0-0}I(a)=I(0)$；但 $I(0)=0$，$\lim\limits_{a\to 0+0}I(a)=C_1$，$\lim\limits_{a\to 0-0}I(a)=C_2$，故 $C_1=C_2=0$．于是，最后得

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a\ln(1+|a|)\quad(-\infty<a<+\infty).$$

3735. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}\quad(|a|<1).$

解　解法一

设 $\displaystyle I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$．由于

$$\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=\frac{1-a^2\cos_2 x}{1-2a\cos x+a^2\cos^2 x}$$

$$\geqslant\frac{1-a^2}{1+2|a|+a^2}$$

$$=\frac{1-a^2}{(1+|a|)^2}>0,$$

故 $\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}$ 为连续函数．又由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\cos x}\cdot\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+at)-\ln(1-at)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{a}{1+at}-\frac{-a}{1-at}}{1}=2a,$$

今补充被积函数在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的值为$2a$，即易知被积函数为连续函数，且它对 a 有连续导数，从而可在积分号下求导数，得

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+a\cos x}+\frac{1}{1-a\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}{}^{*)}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

从而 $I(a)=\pi\arcsin a+C$ $(|a|<1)$．又 $I(0)=0$，故 $C=0$．

于是，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}=\pi\arcsin a \quad (|a|<1).$$

*) 利用2028题(a)的结果。

解法二

把被积函数表成下述积分形式

$$\frac{1}{\cos x}\cdot\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=2a\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x}.$$

注意，此式当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时也成立，此时左端应理解为其极限值

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\cos x}\cdot\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=2a.$$

于是，当 $a\neq 0$ 时，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$$

$$=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x}$$

$$=2a\int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2y^2\cos^2 x}$$

$$=2a\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2y^2}}dy \quad ^{**)}$$

$$=\pi a\cdot\frac{1}{a}\arcsin ay\Big|_0^1=\pi\arcsin a;$$

当 $a=0$ 时，原积分显然为零．因此，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}=\pi\arcsin a \quad (|a|<1).$$

**) 利用2028题(a)的结果，即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2y^2\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+ay\cos x}+\frac{1}{1-ay\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-a^2y^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-ay}{1+ay}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+ay}{1-ay}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-a^2y^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2y^2}}.$$

3736．利用公式

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2},$$

计算积分 $\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}.$$

由于函数 $\frac{1}{1+x^2y^2}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$， $0\leqslant y\leqslant 1$ 上连

续，且$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$在〔0，1〕上绝对可积，故上述积分号可交换

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}. \qquad (1)$$

作代换$x=\cos t$，可得

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\cos^2 t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+y^2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}. \qquad (2)$$

于是，由（1）式及（2）式即得

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{\pi\, dy}{2\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2}\ln(y+\sqrt{1+y^2})\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

3737．应用积分符号下的积分法，计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a>0, \ b>0).$$

解 首先注意，因为

$$\lim_{x\to+0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0,$$

$$\lim_{x\to1-0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \lim_{x\to1-0} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{x^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to1-0} (bx^b - ax^a) = b-a,$$

故 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ 不是广义积分，并且，如果补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0，在 $x=1$ 时的值为 $b-a$，则可理解为〔0，1〕上连续函数的积分．由于

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

（注意，$x=0$ 时左端规定为 0，$x=1$ 时左端规定为 $b-a$），而函数 x^y 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$a \leqslant y \leqslant b$ 上连续（不妨设 $a<b$），故有

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

$$= \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx$$

$$= \int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

3738．计算积分：

(a) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$;

(б) $\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$ ($a>0$, $b>0$).

解 (a) 不妨设 $a<b$.

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$$

$$=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\int_a^b x^y\,dy$$

$$=\int_a^b dy\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\,dx,$$

这里；当 $x=0$ 时，$\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y$ 理解为零，从而 $\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$，$a\leqslant y\leqslant b$ 上连续，故可应用积分号下的积分法交换积分次序。

作代换 $x=e^{-t}$，可得

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\,dx$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t}\sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{1+(1+y)^2}[-(y+1)\sin t$$

$$-\cos t]e^{-(y+1)t}\Big|_0^{+\infty}\text{*)}$$

$$=\frac{1}{1+(1+y)^2}.$$

于是，最后得

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

$$=\int_a^b \frac{dy}{1+(1+y)^2}=\operatorname{arc\,tg}(1+y)\Big|_a^b$$

$$=\operatorname{arc\,tg}(1+b)-\operatorname{arc\,tg}(1+a)$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{b-a}{1+(1+b)(1+a)}.$$

(б) 同(a)并利用1828题的结果易得

$$\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

$$=\int_a^b dy\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\,dx$$

$$=\int_a^b \frac{1+y}{1+(1+y)^2}dy=\frac{1}{2}\ln[1+(1+y)^2]\Big|_a^b$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}.$$

*) 利用1829题的结果.

3739. 设 $F(k)$和 $E(k)$为完全椭圆积分（参阅问题3725）.证明公式

(a) $\int_0^k F(k)k\,dk=E(k)-k_1^2F(k)$;

(б) $\int_0^k E(k)k\,dk = \frac{1}{3}[(1+k^2)E(k) - k_1^2 F(k)]$,

其中 $k_1^2 = 1-k^2$.

证 (a) 利用3725题的结果，可得

$$[E(k)-k_1^2F(k)]'$$
$$=E'(k)+2kF(k)-(1-k^2)F'(k)$$
$$=\frac{E(k)-F(k)}{k}+2kF(k)$$
$$-(1-k^2)\left[\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}\right]$$
$$=kF(k).$$

于是，

$$E(k)-k_1^2F(k)=\int_0^k kF(k)dk+C,$$

其中 C 为常数．但当 $k=0$ 时，上式左端为 $E(0)-F(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$，而右端等于 C，故 $C=0$．最后证得

$$\int_0^k kF(k)dk=E(k)-k_1^2F(k).$$

(б) 由于

$$\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]'$$
$$=\frac{1}{3}[2kE(k)+(1+k^2)E'(k)+2kF(k)$$

$$-(1-k^2)F'(k)]$$

$$=\frac{1}{3}\Big\{2k\,E(k)+(1+k^2)\cdot\frac{E(k)-F(k)}{k}$$

$$+2k\,F(k)-(1-k^2)\cdot\Big[\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}\Big]\Big\}$$

$$=k\,E(k),$$

故

$$\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]=\int_0^k k\,E(k)dk+C,$$

以 $k=0$ 代入上式，得 $C=0$．于是，最后证得

$$\int_0^k k\,E(k)dk=\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)].$$

3740．证明公式

$$\int_0^x xJ_0(x)dx=xJ_1(x),$$

其中 $J_0(x)$及 $J_1(x)$为足指数是 0 与 1 的贝塞耳函数（参阅问题3726）．

证 $$\int_0^x uJ_0(u)du=\frac{1}{\pi}\int_0^x u\,du\int_0^\pi\cos(-u\sin\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x u\,du\int_0^\pi[\cos(\varphi-u\sin\varphi)\cos\varphi$$

$$+\sin(\varphi-u\sin\varphi)\sin\varphi]d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi u\cos(\varphi-u\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi u\sin(\varphi-u\sin\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

$$
=\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)d(u\sin\varphi)
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varphi\int_0^x u\sin(\varphi-u\sin\varphi)d(u\sin\varphi-\varphi)
$$

$$
=\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)d(u\sin\varphi-\varphi)
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)d\varphi
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varphi\int_0^x u\, d\cos(\varphi-u\sin\varphi)
$$

$$
=\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)d\varphi
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(\varphi-x\sin\varphi)d\varphi
$$

$$
-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varphi\int_0^x \cos(\varphi-u\sin\varphi)du
$$

$$
=\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)d\varphi
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(\varphi-x\sin\varphi)d\varphi
$$

$$
-\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)d\varphi
$$

$$
=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(\varphi-x\sin\varphi)d\varphi=xJ_1(x),
$$

上述各式中的被积函数显然为 u 及 φ 的二元连续函数，因此，交换积分顺序是合理的．本题获证．

§2．带参数的广义积分．积分的一致收敛性

1° 一致收敛性的定义　若对于任何的 $\varepsilon>0$，都存在有数 $B=B(\varepsilon)$，使得在 $b\geqslant B$ 的条件下有

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon \quad (y_1<y<y_2),$$

则称广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{1}$$

（其中函数 $f(x,y)$ 于域 $a\leqslant x<+\infty$，$y_1<y<y_2$ 内是连续的）在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛．

积分（1）的一致收敛与形状如下的一切级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,y)dx \tag{2}$$

（其中 $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$）的一致收敛等价．

若积分（1）在区间 (y_1, y_2) 中一致收敛，则在这个区间内它是参数 y 的连续函数．

2° 哥西判别法则　积分（1）在区间 (y_1,y_2) 内一致收敛的充分而且必要的条件为，对于任何的 $\varepsilon>0$ 便存在有数 $B=B(\varepsilon)$，使得只要是 $b'>B$ 及 $b''>B$ 则

$$\text{当 } y_1<y<y_2 \text{ 时} \left|\int_{b'}^{b''} f(x,y)dx\right|<\varepsilon.$$

3° 外尔什特拉斯判别法　对于积分（1）一致收敛的

充分条件为，与参数 y 无关的强函数 $F(x)$ 存在，使得

(1) 当 $a\leqslant x<+\infty$ 时 $|f(x,y)|\leqslant F(x)$

及

(2) $\int_a^{+\infty}F(x)dx<+\infty$.

4° 对于不连续函数的广义积分有类似的定理.

求积分的收敛域：

3741. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{1+x^2}dx$.

解 当 $a\geqslant 0$ 时，

$$\frac{e^{-ax}}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2}.$$

而积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2},$$

故原积分收敛.

当 $a<0$ 时，原积分显然发散. 于是，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{1+x^2}dx$ 的收敛域为 $a\geqslant 0$ 的一切 a 值.

3742. $\int_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$.

解 首先注意

$$\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'=\frac{(1-p)x^p+(1-q)x^q}{(x^p+x^q)^2}.$$

若 $\max(p,q)>1$，则显然当 x 充分大时，$\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'<0$，从而当 x 充分大时函数 $\frac{x}{x^p+x^q}$ 是递减的，并且很明显，这时

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^p+x^q}=0.$$

又因 $\left|\int_\pi^A \cos x\,dx\right|=|\sin A|\leqslant 1$（对任何 $A>\pi$），故知 $\int_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$ 收敛。

若 $\max(p,q)\leqslant 1$，则恒有 $\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'\geqslant 0$，故函数 $\frac{x}{x^p+x^q}$ 在 $x\geqslant\pi$ 上是递增的。于是，对于任何正整数 n，有

$$\begin{aligned}&\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx\\ &>\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x}{x^p+x^q}dx\\ &\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{\pi^p+\pi^q}\cdot\frac{\pi}{4}\\ &=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8(\pi^p+\pi^q)}=\text{常数}>0,\end{aligned}$$

故不满足柯西收敛准则，因此积分 $\int_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$

发散.

3743. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^q}{x^p}dx$.

解 若 $q=0$，则由于积分 $\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 仅当 $p>1$ 时收敛，而积分 $\int_0^A\frac{1}{x^p}dx$ 仅当 $p<1$ 时收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 1}{x^p}dx$ 对于任何的 p 值及 $q=0$ 发散.

若 $q\neq 0$，则积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^q}{x^p}dx=\int_0^{+\infty}x^{-p}\sin x^q dx,$$

利用 2380 题的结果即知：当 $\left|\frac{1-p}{q}\right|<1$ 时，原积分收敛.

3744. $\int_0^2\frac{dx}{|\ln x|^p}$.

解 考虑积分

$$\int_0^1\frac{dx}{|\ln x|^p}=\int_0^1\frac{dx}{\ln^p\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\int_0^1\ln^{-p}\left(\frac{1}{x}\right)dx,$$

利用2362题的结果即知：它当 $-p>-1$ 或 $p<1$ 时收敛.

再考虑积分

$$\int_1^2 \frac{dx}{|\ln x|^p} = \int_1^2 \frac{dx}{\ln^p x}.$$

由于

$$\lim_{x\to 1+0} (x-1)^p \cdot \frac{1}{\ln^p x} = \left[\lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{\ln x}\right]^p$$

$$= \left[\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x^{-1}}\right]^p = 1,$$

故积分 $\int_1^2 \frac{dx}{\ln^p x}$ 与积分 $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^p}$ 具有相同的敛散性，而后者显然当 $p<1$ 时收敛，$p\geqslant 1$ 时发散，从而前者亦然。

于是，仅当 $p<1$ 时，积分

$$\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}$$

收敛。

3745. $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx.$

解 $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x} \cdot \sqrt[n]{1+x}} dx.$

由于当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，对于任意的 n，$\sqrt[n]{1+x}$ 与 $\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}}$ 都是单调有界函数，故原积分与积分

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}} dx$$

同敛散．对此积分作代换 $t = \frac{1}{1-x}$，则得

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{n}}} dt.$$

易知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha}} dt$ 仅当 $\alpha > 0$ 时收敛．事实上，当 $\alpha > 0$ 时它显然收敛．当 $\alpha = 0$ 时它显然发散．当 $\alpha < 0$ 时，令 $\beta = -\alpha$ （$\beta > 0$），则对于正整数 n 有

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}} t^{\beta} \cos t \, dt$$

$$> (2n\pi)^{\beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} \to +\infty \quad (n \to \infty),$$

故积分 $\int_1^{+\infty} t^{\beta} \cos t \, dt$ 发散．

于是，积分

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx$$

仅当 $2 - \frac{1}{n} > 0$ 时收敛，即仅当 $n < 0$ 或 $n > \frac{1}{2}$ 时收敛．

3746. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx \quad (p>0)$.

解 因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{x^{p-1}+\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\begin{cases}1, & \text{当 } p>1 \text{ 时;}\\ \frac{1}{2}, & \text{当 } p=1 \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } 0<p<1 \text{ 时,}\end{cases}$$

故 $x=0$ 不是积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ 的瑕点，因此，只要讨论积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ （$p>0$）的敛散性.由于

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)},$$

而 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛（当 $p>0$ 时），故只要讨论

$$\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}dx$$

的敛散性.但当 $p>0$，$x\geqslant 2$ 时，

$$0\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^p(x^p+1)}-\frac{\cos 2x}{x^p(x^p+1)}\right]$$

$$=\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}\leqslant\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}$$

$$\leqslant \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p-1)} \leqslant \frac{1}{x^p(x^p-1)}.$$

而易知$\int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p(x^p+1)}dx$恒收敛（当$p>0$时），积分$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x^p+1)}$当$0<p\leqslant\frac{1}{2}$时发散，积分$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x^p-1)}$当$p>\frac{1}{2}$时收敛，故积分$\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}dx$当$p>\frac{1}{2}$时收敛，当$0<p\leqslant\frac{1}{2}$时发散。由此可知，积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$（$p>0$）仅当$p>\frac{1}{2}$时收敛。

利用与级数比较的方法研究下列积分的收敛性：

3747. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a}dx$.

解 设$a>0$。我们证明：对任何叙列

$$0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots \quad (a_n\to+\infty),$$

级数$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a}dx$都收敛。事实上，有

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a}dx$$

$$=\frac{\sin x}{x+a}\Bigg|_{a_n}^{a_{n+1}}+\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x}{(x+a)^2}dx,$$

故

$$\sum_{n=m}^{m+p-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}dx$$

$$=\frac{\sin a_{m+p}}{a_{m+p}+a}-\frac{\sin a_m}{a_m+a}+\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{\sin x}{(x+a)^2}dx,$$

从而

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}dx\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{a_{m+p}+a}+\frac{1}{a_m+a}+\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{dx}{(x+a)^2}$$

$$=\frac{1}{a_{m+p}+a}+\frac{1}{a_m+a}+\left(\frac{1}{a_m+a}-\frac{1}{a_{m+p}+a}\right)$$

$$=\frac{2}{a_m+a},$$

由此可知，满足柯西收歛准则，从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 收歛. 因此，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 收歛.

若 $a=0$，显然瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}dx$ 发散，故广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 发散.

下设$a<0$. 若$a=-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ ($n=0, 1, 2, \cdots$)，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$$

$$=\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\cos x}{x+a}dx+\int_{(n+1)\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$$

$$=\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\cos x}{x+a}dx+(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t+\frac{\pi}{2}}dt.$$

由上所证，右端第二个积分收敛；又由于

$$\lim_{x\to\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\cos x}{x+a}=(-1)^{n+1},$$

故右端第一个积分收敛（它不是广义积分，补充定义被积函数在 $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 时的值为 $(-1)^{n+1}$ 后即为连续函数的积分）；从而，此时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 收敛。

若 $a<0$ 但 $a\neq-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$，此时 $\cos(-a)\neq0$．由连续性，可取 $\delta>0$，使当 $-a\leqslant x\leqslant-a+\delta$ 时 $\cos x$ 保持定号且

$$|\cos x|\geqslant\frac{1}{2}|\cos(-a)|.$$

于是，

$$\left|\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{\cos x}{x+a}dx\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{2}|\cos(-a)|\cdot\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{dx}{x+a}=+\infty.$$

由此可知，瑕积分 $\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 发散．从而积分 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 更是发散．

综上所述，积分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$$

仅当 $a>0$ 及 $a=-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 时收敛．

3748． $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2x}$ $(n>0)$．

解 由于被积函数非负，故只要考虑化为一种特殊的（正项）级数即可．我们有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2x}dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2x}+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2x}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2x}.$$

又积分

$$0<\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2x}$$

$$<\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{k\pi\,dx}{1+[(k-1)\pi]^n\sin^2 x},$$

$$\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{(k-1)\pi\,dx}{1+[(k+1)\pi]^n\sin^2 x}$$

$$<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}$$

$$<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{(k+1)\pi\,dx}{1+[(k-1)\pi]^n\sin^2 x},$$

且

$$\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+a^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+a^2}}\right)\Bigg|_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}<\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}},$$

$$\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{1+a^2}\operatorname{tg} x\right)\Bigg|_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1+a^2}.$$

由于

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1+a^2}<\frac{\pi}{2},$$

从而

$$\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+a^2\sin^2x}<\frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}.$$

于是，

$$0<\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2x}$$

$$<\frac{k\pi^2}{2\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}},$$

$$\frac{(k-1)\pi^2}{2\sqrt{1+[(k+1)\pi]^n}}$$

$$<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2x}<\frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}.$$

由于当 $n>4$ 时，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi^2}{2\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}$ 及 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}$ 收敛；而当 $n\leqslant 4$ 时，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)\pi^2}{2\sqrt{1+[(k+1)\pi]^n}}$ 发散，故级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2x}$$

当 $n>4$ 时收敛，而级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}$$

仅当 $n>4$ 时收敛。

因此，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}$$

仅当 $n>4$ 时收敛。

3749. $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

解 由于被积函数非负，故只要考虑化为一种特殊的（正项）级数即可。我们有

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{dx}{(x+n\pi)^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

于是，

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p\pi^p}$$

$$<\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

$$<\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\pi^p}.$$

易证积分

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

收敛，且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

当 $p>1$ 时收敛；当 $p\leqslant 1$ 时发散．因此，原积分仅当 $p>1$ 时收敛。

3750. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$.

解 我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$$

$$=\int_0^1\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx .$$

易知右端第一个积分（$x=0$可能是瑕点）当 $n<2$ 时收敛，当 $n\geqslant 2$ 时发散．下面研究右端第二个积分．先设 $n>-1$．对任何叙列

$$1=a_0<a_1<\cdots<a_k<\cdots \quad (a_k\to+\infty) ,$$

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$$

$$=-\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{d[\cos(x+x^2)]}{x^n(1+2x)}$$

$$=-\frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)}\Bigg|_{a_k}^{a_{k+1}}$$

$$-\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{[2(n+1)x+n]\cos(x+x^2)}{x^{n+1}(1+2x)^2}dx,$$

故

$$\sum_{k=m}^{m+p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$$

$$=-\frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)}\Bigg|_{a_m}^{a_{m+p}}$$

$$-\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{[2(n+1)x+n]\cos(x+x^2)}{x^{n+1}(1+2x)^2}dx,$$

从而

$$\left|\sum_{k=m}^{m+p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2a_m^{n+1}}+\frac{1}{2a_{m+p}^{n+1}}+\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2}dx.$$

易知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2}dx$ 收敛（因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^{n+2}\cdot\frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2}=\frac{n+1}{2}>0,$$

$n+2>1$）.

由此可知，对任给的 $\varepsilon>0$，必存在 N，使当 $n>N$ 时，对 $p=1,2,3,\cdots$，均有

$$\left|\sum_{k=m}^{m+p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx\right|<\varepsilon.$$

于是，根据柯西收敛准则，级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$$

收敛，从而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$ 收敛。

再设 $n\leqslant -1$. 令 ξ_k 和 η_k 分别表方程 $x^2+x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ 和 $x^2+x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 的（唯一）正根，其中 $k=1,2,3,\cdots$; 即令

$$\xi_k=\frac{1}{2}(\sqrt{1+8k\pi+\pi}-1),$$

$$\eta_k=\frac{1}{2}(\sqrt{1+8k\pi+2\pi}-1).$$

于是 $\eta_k>\xi_k\to+\infty$（当 $k\to\infty$ 时）．我们有（注意 $-n\geqslant 1$）

$$\int_{\xi_k}^{\eta_k}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$$

$$>\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\xi_k}^{\eta_k}x^{-n}dx\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\xi_k}^{\eta_k}x\,dx$$

$$>\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_k(\eta_k-\xi_k)$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+8k\pi+\pi}-1}{\sqrt{1+8k\pi+2\pi}+\sqrt{1+8k\pi+\pi}}$$

$$\to\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\text{（当 }k\to\infty\text{时）}.$$

由此可知，此时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$ 发散．

综上所述，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$$

仅当$-1<n<2$时收敛.

3751. 在肯定的意义上表达出来，甚么是积分

$$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

在已知区间(y_1, y_2)内不一致收敛?

解 若对于某个正数ε_0，不论B取得多大，恒存在$b_0\geqslant B$以及$y_0\in(y_1, y_2)$（b_0与y_0都依赖于B），使得

$$\left|\int_{b_0}^{+\infty}f(x,y_0)dx\right|\geqslant\varepsilon_0,$$

则$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$在区间(y_1, y_2)内不一致收敛.

3752. 证明：若 1）积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

收敛，2）函数$\varphi(x,y)$有界并关于x是单调的，则积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x,y)dx$$

一致收敛（在对应的域内）.

证 设$|\varphi(x,y)|\leqslant L$，则由题设 1）知：对于任给的$\varepsilon>0$，总存在数$B=B(\varepsilon)$，使当$A'>A>B$时，就

有不等式

$$\left|\int_{A}^{A'} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}. \tag{1}$$

由积分第二中值定理知：存在 $\xi\in[A, A']$，使有下述等式

$$\int_{A}^{A'} f(x)\varphi(x,y)dx$$

$$=\varphi(A+0, y)\cdot\int_{A}^{\xi} f(x)dx$$

$$+\varphi(A'-0, y)\cdot\int_{\xi}^{A'} f(x)dx. \tag{2}$$

由（1）式，得

$$\left|\int_{A}^{\xi} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

于是，由（2）式，可得

$$\left|\int_{A}^{A'} f(x)\varphi(x,y)dx\right|$$

$$< L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} + L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon,$$

即积分 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)dx$ 在对应的 y 域内一致收敛.

3753. 证明：一致收敛的积分

$$I=\int_{1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx \quad (0<y<1)$$

不能以与参数无关的收敛积分为强函数。

证 任给 $\varepsilon>0$．取 $A_0>1$ 充分大，使

$$\int_{A_0-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2}du<\varepsilon.$$

下证：当 $A>A_0$ 时，对一切 $0<y<1$，均有

$$\int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx<\varepsilon.$$

事实上，当 $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\leqslant y<1$ 时，

$$\int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx<\int_A^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx$$

$$=\int_{A-\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-u^2}du\leqslant\int_{A-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2}du$$

$$<\int_{A_0-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2}du<\varepsilon;$$

当 $0<y<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$ 时，

$$\int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx$$

$$<\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx$$

$$=\int_1^{\frac{1}{y}} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx$$

$$+\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{y}-1} e^{-\frac{1}{y^2}t^2} dt+\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}t^2} dt$$

$$<2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{y^2}} dt=2y\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$=2y\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}<\varepsilon .$$

由此可知，积分 $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx$ 在 $0<y<1$ 上一致收敛。

最后证明，不存在这样的函数 $\varphi(x)$ （$x\geqslant 1$），使

$$0<e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\leqslant\varphi(x)$$

$$(x\geqslant 1,\ 0<y<1), \tag{1}$$

并且 $\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛。用反证法。假定有这样的函数 $\varphi(x)$ 存在，则由 $\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx$ 的收敛性可知，必存在点 $x_0>1$ 使 $\varphi(x_0)<1$。于是，令 $y_0=\frac{1}{x_0}$，则 $0<y_0<1$ 且

$$e^{-\frac{1}{y_0^2}\left(x_0-\frac{1}{y_0}\right)^2}=1>\varphi(x_0),$$

此显然与（1）式矛盾。由此可知，一致收敛的积分

I 的被积函数不能以与参数 y 无关的具收敛积分的函数为强函数．证毕．

3754．证明：积分

$$I=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$$

1）在任何区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 内一致收敛； 2）在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ 内非一致收敛．

证 显然，积分 I 对于每一个定值 $\alpha\geqslant 0$ 是收敛的．事实上，当 $\alpha=0$ 时，$\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=0$；当 $\alpha>0$ 时，$\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=-e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty}=1$．

1）如果 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$，则由于

$$0<\int_A^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=e^{-\alpha A}\leqslant e^{-aA},$$

故对于任给的 $\varepsilon>0$，可以找到不依赖于 α 的数 $A_0=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon}$，使当 $A>A_0$ 时，就有

$$\int_A^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx<e^{-aA_0}=\varepsilon.$$

于是，在区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 上积分 I 一致收敛．

2）如果 $0\leqslant\alpha\leqslant b$，则不存在这样的数 A_0．事实上，取 $0<\varepsilon<1$ 就办不到．由于当 $\alpha\to+0$ 时，$e^{-A\alpha}\to 1$，故对于足够小的 α 值，$e^{-A\alpha}$ 就比任意一个小于1的数 ε 为大．因此，在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ 上，积

分 I 对 α 的收敛是不一致的。

3755. 证明迪里黑里积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

1）在每一个不含数值 $\alpha=0$ 的闭区间[a, b]上一致收敛，2）在含数值 $\alpha=0$ 的每一个闭区间[a, b]上非一致收敛.

证　不失一般性，我们只考虑 α 的正值。

1）由于积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$$

是收敛的，故对于任给的 $\varepsilon>0$，存在数 A_0，使当 $A>A_0$时，恒有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz\right|<\varepsilon.$$

当 $\alpha>0$时，由于

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_{A\alpha}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz,$$

故取 $A>\frac{A_0}{a}$，对于 $\alpha\geqslant a>0$，就有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|<\varepsilon.$$

于是，在区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 上，积分 I 是一致收敛的.

2）对于任何的 $A>0$，当 $\alpha\to+0$ 时，

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

$$=\int_{A\alpha}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz\to\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}.$$

因此，当 $\alpha>0$ 且充分小时，有

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx>\frac{\pi}{4}.$$

于是，在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ （$b>0$）上，积分 I 不一致收敛.

研究下列积分在所指定区间内的一致收敛性：

3756. $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx\quad(0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty)$.

解 由于当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$时，

$$|e^{-\alpha x}\sin x|\leqslant e^{-\alpha_0 x},$$

且积分 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha_0 x}dx=\frac{1}{\alpha_0}$ 收敛，故积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx$$

在区间 $0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$上一致收敛.

3757. $\int_1^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}dx\quad(a\leqslant\alpha\leqslant b)$.

解 当 $a\leqslant\alpha\leqslant b$ 且 $x\geqslant1$ 时，

$$0<x^{\alpha}e^{-x}\leqslant x^{b}e^{-x}.$$

由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot x^b e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{b+2}}{e^x} = 0,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx$ 收敛．从而积分

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$$

在区间 $a \leqslant \alpha \leqslant b$ 上一致收敛．

3758． $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty)$．

解 由于 $\left|\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$，且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ 收敛，故积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$$

在 $-\infty < \alpha < +\infty$ 上一致收敛．

3759． $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\alpha)^2+1} \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)$．

解 由于 $0 < \frac{1}{(x+\alpha)^2+1} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant +\infty)$，

且积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ 收敛，故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\alpha)^2+1}$$

在 $0 \leqslant \alpha < +\infty$ 上一致收敛．

3760. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx\quad(0\leqslant\alpha<+\infty)$.

解 首先注意，因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}=1,$$

故 $x=0$ 不是瑕点。

证法一

由于 $\left|\int_0^A\sin x\,dx\right|=|1-\cos A|\leqslant 2$，而当 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 时，函数 $\frac{e^{-\alpha x}}{x}$ 在 $x>0$ 关于 x 递减，并且当 $x\to+\infty$ 时它关于 α（$0\leqslant\alpha<+\infty$）一致趋于零（因为 $0\leqslant\alpha<+\infty$，$x>0$ 时，$0<\frac{e^{-\alpha x}}{x}\leqslant\frac{1}{x}$），故由迪里黑里判别法知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上一致收敛。

证法二

由积分学第二中值定理知：当 $A'>A>0$ 时，

$$\left|\int_A^{A'}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx\right|=\left|\frac{1}{A}\int_A^{\xi}e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right|,$$

其中 $A\leqslant\xi\leqslant A'$. 我们知道 $e^{-\alpha x}\sin x$ 的原函数是

$$F_\alpha(x)=-\frac{\alpha\sin x+\cos x}{1+\alpha^2}e^{-\alpha x},$$

显然，当 $\alpha\geqslant 0$，$x>0$ 时，

$$|F_a(x)| \leqslant \frac{a+1}{1+a^2} \leqslant \frac{2a}{1+a^2} + \frac{1}{1+a^2} < 2,$$

故当 $A' > A > 0$，$0 \leqslant a < +\infty$时，

$$\left| \int_A^{A'} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{A} [F_a(\xi) - F_a(A)] \right| < \frac{4}{A}.$$

由此，利用一致收敛的哥西收敛准则，即知积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$$

在 $0 \leqslant a < +\infty$上一致收敛．证毕．

3761. $\int_1^{+\infty} e^{-ax} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad (0 \leqslant a < +\infty)$，其中 $p > 0$ 是常数。

解 由于

$$\left| \int_1^A \cos x\, dx \right| = |\sin A - \sin 1| \leqslant 2,$$

而当 $0 \leqslant a < +\infty$时，函数 $\frac{e^{-ax}}{x^p}$在 $x \geqslant 1$ 关于 x 递减且当 $x \to +\infty$时关于 a $(0 \leqslant a < +\infty)$ 一致趋于零$\left(\text{因为 } 0 \leqslant a < +\infty,\ x \geqslant 1 \text{ 时，} 0 < \frac{e^{-ax}}{x^p} \leqslant \frac{1}{x^p}\right)$，

故由迪里黑里判别法即知 $\int_1^{+\infty} e^{-ax} \frac{\cos x}{x^p} dx$ 在 $0 \leqslant a < +\infty$上一致收敛．

注意，也可仿3760题证法二，利用积分学第二中

值定理来证明。

3762. $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx$ $(0\leqslant\alpha<+\infty)$.

解 此积分是收敛的．事实上，当 $\alpha=0$ 时，积分为零；当 $\alpha>0$ 时，设 $\sqrt{\alpha}x=t$，则得

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但是，此积分却不一致收敛．事实上，对于任何的 $A>0$，由于

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_{\sqrt{\alpha}A}^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故对于 $0<\varepsilon_0<\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，必存在 $\alpha_0>0$，使有

$$\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha_0}e^{-\alpha_0x^2}dx>\varepsilon_0,$$

即此积分不是一致收敛的。

3763. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$, (a) $a<\alpha<b$;

(б) $-\infty<\alpha<+\infty$.

解 显然，对任何固定的 α，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 都收敛，并且（作代换 $x-\alpha=t$）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

(a) 取正数R充分大，使$-R<a<b<R$.显然，当$|x|\geqslant R$时，对一切$a<\alpha<b$，有

$$0<e^{-(x-\alpha)^2}<e^{-(|x|-R)^2},$$

显然积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(|x|-R)^2}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-(x-R)^2}dx$

收敛，故积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$对$a<\alpha<b$一致收敛。

(б) 对任何$A>0$，有

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_A^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{A-\alpha}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi},$$

故当α充分大时，$\int_A^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx>\frac{\sqrt{\pi}}{2}$；由此可知$\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$在$-\infty<\alpha<+\infty$上非一致收敛，当然$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$在$-\infty<\alpha<+\infty$上更非一致收敛.

3764. $\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dy\quad(-\infty<x<+\infty)$.

解 此积分对任一固定的x值，显然是收敛的，且当$x>0$时，

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dy=\frac{\sin x}{x}e^{-x^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但是，它对$-\infty<x<+\infty$却不是一致收敛的．事实上，对于任何的$A>0$，当$x>0$时，

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dy$$

$$=\frac{\sin x}{x}e^{-x^2}\cdot\int_{Ax}^{+\infty}e^{-t^2}dt\to\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad(x\to+0),$$

由此可知积分不一致收敛．

3765. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{1+x^p}dx\quad(p\geqslant 0)$．

解 由2380题易知积分

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$$

收敛，又$\frac{1}{1+x^p}$（$p\geqslant 0$）在$x\geqslant 0$上对x单调递减且一致有界：

$$0<\frac{1}{1+x^p}\leqslant 1\quad(p\geqslant 0,\ x\geqslant 0),$$

故由亚伯耳判别法知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{1+x^p}dx$$

对$p\geqslant 0$一致收敛．

3766. $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$，(a) $p\geqslant p_0>0$；

(б) $p>0$ $(q>-1)$.

解 首先注意，$x=0$ 和 $x=1$ 都可能是瑕点. 作代换 $x=e^{-t}$，得

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx=-\int_{+\infty}^0 e^{-(p-1)t}t^q e^{-t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^q dt,$$

右端的积分当 $p>0$ $(q>-1)$ 时是收敛的*)，从而左端的积分此时也收敛. 更由于（ε，$\varepsilon'>0$ 很小）

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon'} x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx=\int_{\ln\frac{1}{1-\varepsilon'}}^{\ln\frac{1}{\varepsilon}} e^{-pt}t^q dt,$$

故 $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$ 的一致收敛性等价于 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^q dt$ 的一致收敛性.

(a) 当 $p\geqslant p_0>0$ 时，由于

$0<e^{-pt}t^q\leqslant e^{-p_0t}t^q$ $(0<t<+\infty)$，

而积分 $\int_0^{+\infty}e^{-p_0t}t^q dt$ 收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^q dt$ 一致收敛（对于 $p\geqslant p_0>0$）. 从而原积分 $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$ 当 $p\geqslant p_0>0$ 时一致收敛.

(б) 对任何 $A>0$，$p>0$，作代换 $pt=s$，则

$$\int_A^{+\infty}e^{-pt}t^q dt=\frac{1}{p^{q+1}}\int_{pA}^{+\infty}s^q e^{-s}ds,$$

由于 $q>-1$，故积分 $\int_0^{+\infty}s^q e^{-s}ds$ 收敛，且显然

$$0<\int_0^{+\infty} s^q e^{-s} ds<+\infty,$$

于是，有

$$\lim_{p\to+0}\int_A^{+\infty} e^{-pt}t^q dt=+\infty,$$

由此即知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^q dt$ 在 $p>0$ 上非一致收敛.

从而原积分 $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q \frac{1}{x}dx$ 当 $p>0$ 时非一致收敛.

*) 利用2361题的结果（在其中作代换 $pt=s$）.

3767. $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (0\leqslant n<+\infty)$.

解 注意，$x=1$ 是瑕点. 由于当 $0\leqslant x<1$ 时，有

$$0\leqslant\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0\leqslant n<+\infty),$$

而积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$ 收敛，故由外氏判别法知积分 $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 当 $0\leqslant n<+\infty$ 时一致收敛.

3768. $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n} \quad (0<n<2)$.

解 作代换 $\frac{1}{x}=t$，则

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n}=\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\,dt,$$

并且，很明显，$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n}$的一致收敛相当于$\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\,dt$的一致收敛．显然，当$n<2$时，积分$\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\,dt$是收敛的．下证：当$0<n<2$时，它不一致收敛．事实上，当$0<n<2$时，对任何正整数$m$，有

$$\int_{2m\pi+\frac{\pi}{4}}^{2m\pi+\frac{\pi}{2}} t^{n-2}\sin t\,dt>\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2m\pi+\frac{\pi}{4}}^{2m\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{t^{2-n}}$$

$$>\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}.$$

由于$\lim\limits_{n\to 2-0}\frac{1}{\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}=1$，故当$n$在$0<n<2$内且与2充分接近时，必有$\frac{1}{\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}>\frac{1}{2}$．于是，这时

$$\int_{2m\pi+\frac{\pi}{4}}^{2m\pi+\frac{\pi}{2}} t^{n-2}\sin t\,dt>\frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}=\text{常数}>0,$$

故$\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\,dt$在$0<n<2$上非一致收敛．

3769. $\int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \quad \left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right)$.

解 首先注意 $x=1$，$x=2$ 是瑕点；$x=0$ 可能是瑕点。将积分分成在$(0,1)$及$(1,2)$上的两个积分。

当 $0<x<1$ 且 $|\alpha|<\frac{1}{2}$时，

$$\left|\frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\right| < \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}},$$

当 $1<x<2$ 且 $|\alpha|<\frac{1}{2}$时，

$$\left|\frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\right| < \frac{\sqrt{2}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}.$$

易知上述两个不等式右端的函数分别在区间$(0,1)$及$(1,2)$上的积分收敛，故由外氏判别法知积分

$$\int_0^2 \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} dx$$

对 $|\alpha|<\frac{1}{2}$ 一致收敛。

3770. $\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

解 $\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx$

$$= \int_0^\alpha \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha - x}} dx + \int_\alpha^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}} dx.$$

对于积分$\int_0^a \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{a-x}}dx$，由于

$$\left|\int_{a-\eta}^{a} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{a-x}}dx\right| \leqslant \int_{a-\eta}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a-x}}$$

$$=2\sqrt{\eta},$$

故对于任给的$\varepsilon>0$，只要取$0<\eta<\frac{\varepsilon^2}{4}$，即有

$$\left|\int_{a-\eta}^{a} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{a-x}}dx\right|<\varepsilon.$$

因此，对$0\leqslant\alpha\leqslant 1$它是一致收敛的。

对于积分$\int_a^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-a}}dx$，由于

$$\left|\int_{a}^{a+\eta} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-a}}dx\right| \leqslant \int_{a}^{a+\eta} \frac{dx}{\sqrt{x-a}}$$

$$=2\sqrt{\eta},$$

故对于任给的$\varepsilon>0$，只要取$0<\eta<\frac{\varepsilon^2}{4}$，即有

$$\left|\int_{a}^{a+\eta} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-a}}dx\right|<\varepsilon.$$

因此，对$0\leqslant\alpha\leqslant 1$它是一致收敛的。

于是，积分

$$\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}dx$$

对$0\leqslant\alpha\leqslant 1$一致收敛。

3771. 若积分在参数的已知值的某邻域内一致收敛，则称此积分对参数的已知值一致收敛。证明积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\,dx}{1+\alpha^2x^2}$$

在每一个 $\alpha\neq 0$ 的值一致收敛，而在 $\alpha=0$ 非一致收敛。

证 设 α_0为任一不为零的数，不妨设 $\alpha_0>0$。今取 $\delta>0$，使 $\alpha_0-\delta>0$。下面证明积分 I 在 $(\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta)$内一致收敛。事实上，当 $\alpha\in(\alpha_0-\delta,\ \alpha_0+\delta)$ 时，由于

$$0<\frac{\alpha}{1+\alpha^2x^2}<\frac{\alpha_0+\delta}{1+(\alpha_0-\delta)^2x^2},$$

且积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\alpha_0+\delta}{1+(\alpha_0-\delta)^2x^2}dx$$

收敛，故由外氏判别法知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\,dx}{1+\alpha^2x^2}$$

在$(\alpha_0-\delta,\ \alpha_0+\delta)$内一致收敛，从而在 α_0点一致收敛。由 α_0 的任意性知积分 I 在每一个 $\alpha\neq 0$ 的值一致收敛。

其次，我们证明积分 I 在 $\alpha=0$ 非一致收敛。事实上，对原点的任何邻域 $(-\delta,\ \delta)$ 均有下述结果：对任何的 $A>0$，有

$$\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\,dx}{1+\alpha^2x^2}=\int_{\alpha A}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\quad(\alpha>0).$$

由于

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_{\alpha A}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2},$$

故取 $0<\varepsilon_0<\frac{\pi}{2}$，在$(-\delta,\delta)$中必存在某一个 $\alpha_0>0$，使有

$$\left|\int_{\alpha_0A}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\right|>\varepsilon_0,$$

即

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\alpha_0dx}{1+\alpha_0^2x^2}\right|>\varepsilon_0.$$

因此，积分 I 在 $\alpha=0$ 点的任一邻域$(-\delta,\delta)$内非一致收敛，从而积分 I 在 $\alpha=0$ 时非一致收敛。

3772．在下式中

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$$

把极限移到积分符号内合理吗？

解 不合理．事实上，由3754题 2）的结果知，积分 $\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$ 对 $0\leqslant\alpha\leqslant b$（$b>0$）的收敛并非一致，故一般不能应用积分符号与极限符号的交换定理．对于本题，实际上也不能交换，这是由于

$$\int_0^{+\infty}\left(\lim_{\alpha\to+0}\alpha e^{-\alpha x}\right)dx=0,$$

而

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=\lim_{\alpha\to+0}(-e^{-\alpha x})\Big|_0^{+\infty}=1,$$

故得

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx\neq\int_0^{+\infty}\left(\lim_{\alpha\to+0}\alpha e^{-\alpha x}\right)dx.$$

3773. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内可积分，证明公式

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}f(x)dx.$$

证 容许有有限个瑕点.为叙述简单起见,例如,设只有一个瑕点 $x=0$. 已知积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛且被积函数中不含有 α,故它关于 α 一致收敛.又因函数 $e^{-\alpha x}$ 对于固定的 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，关于 x $(x>0)$是递减的，并且一致有界：$0<e^{-\alpha x}\leqslant1$ $(0\leqslant\alpha\leqslant1, x>0)$，故根据亚贝尔判别法知积分 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 上一致收敛．于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，可取 $\eta>0$, $A_0>0$ $(\eta<A_0)$，使

$$\left|\int_0^{\eta}e^{-\alpha x}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{5},$$

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{5}\quad(0\leqslant\alpha\leqslant1).$$

由于 $f(x)$ 在 $[\eta, A_0]$ 上常义可积，故有界，即存在常数

M_0，使 $|f(x)|\leqslant M_0$ $(\eta\leqslant x\leqslant A_0)$ 。再根据二元函数 $e^{-\alpha x}$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，$\eta\leqslant x\leqslant A_0$ 上的一致连续性知，必存在 $\delta>0$ $(\delta<1)$，使当 $0<\alpha<\delta$ 时，对一切 $\eta\leqslant x\leqslant A_0$，皆有

$$0\leqslant 1-e^{-\alpha x}<\frac{\varepsilon}{5A_0M_0}.$$

于是，当 $0<\alpha<\delta$ 时，恒有

$$\left|\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx-\int_0^{+\infty}f(x)dx\right|$$

$$=\left|\int_\eta^{A_0}(e^{-\alpha x}-1)f(x)dx+\int_{A_0}^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx\right.$$

$$\left.-\int_{A_0}^{+\infty}f(x)dx+\int_0^\eta e^{-\alpha x}f(x)dx-\int_0^\eta f(x)dx\right|$$

$$<M_0A_0\cdot\frac{\varepsilon}{5A_0M_0}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}f(x)dx.$$

3774. 若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内绝对可积分，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx=0.$$

证 由 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的绝对可积性可知：对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，使有

$$\int_A^{+\infty}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx\right|$$

$$\leqslant\left|\int_0^A f(x)\sin nx\,dx\right|+\frac{\varepsilon}{3}.$$

先设 $f(x)$在〔0，A〕中无瑕点．我们在〔0，A〕中插入分点 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{m-1}<t_m=A$，并设 $f(x)$在〔t_{k-1}，t_k〕上的下确界为 m_k，则有

$$\int_0^A f(x)\sin nx\,dx=\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\sin nx\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k}[f(x)-m_k]\sin nx\,dx$$

$$+\sum_{k=1}^m m_k\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sin nx\,dx,$$

从而有

$$\left|\int_0^A f(x)\sin nx\,dx\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^m w_k\Delta t_k+\sum_{k=1}^m|m_k|\cdot\frac{|\cos nt_{k-1}-\cos nt_k|}{n}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^m w_k\Delta t_k+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^m|m_k|,$$

其中 w_k 为 $f(x)$在区间〔t_{k-1}，t_k〕上的振幅，$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$．

由于 $f(x)$在〔0，A〕上可积，故可取某一分法，使有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} w_k \Delta t_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对于这样固定的分法，$\sum_{k=1}^{m}|m_k|$为一定值，因而存在 N，使当 $n>N$ 时，恒有

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m}|m_k| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，对于上述所选取的 N，当 $n>N$ 时，

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\, dx\right|$$

$$\leqslant \left|\int_0^A f(x)\sin nx\, dx\right| + \left|\int_A^{+\infty} f(x)\sin nx\, dx\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} w_k \Delta t_k + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m}|m_k| + \int_A^{+\infty}|f(x)|dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\, dx = 0.$$

其次，设 $f(x)$在区间〔0，A〕中有瑕点．为简便起见，不妨设只有一个瑕点，且为 0 。于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使有

$$\int_0^{\eta}|f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

但是，$f(x)$在$[\eta, A]$上无瑕点，故应用上述结果可知存在N，使当$n>N$时，恒有

$$\left|\int_{\eta}^{A} f(x)\sin nx\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，当$n>N$时，有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin nx\, dx\right| \\
&\leqslant \int_{0}^{\eta} |f(x)|dx + \left|\int_{\eta}^{A} f(x)\sin nx\, dx\right| \\
&\quad + \int_{A}^{+\infty} |f(x)|dx \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin nx\, dx = 0.$$

总之，当$f(x)$在$(0, +\infty)$内绝对可积，不论$f(x)$在$(0, +\infty)$内有无瑕点，均可证得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin nx\, dx = 0.$$

3775. 证明：若（1）在每一个有穷区间(a, b)内$f(x, y) \rightrightarrows f(x, y_0)$；（2）$|f(x, y)| \leqslant F(x)$，其中$\int_{a}^{+\infty} F(x)dx < +\infty$，则

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx.$$

证 条件（1）表示当 $y \to y_0$时，当 x 在任何有穷区间(a, b)上，$f(x, y)$都一致趋于 $f(x, y_0)$。于是，有

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b f(x,y_0)dx$$

（对任何 $b > a$）.

又在不等式$|f(x,y)| \leqslant F(x)$中令 $y \to y_0$（任意固定 x），得 $|f(x,y_0)| \leqslant F(x)$，故$\int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx$收敛.

任给 $\varepsilon > 0$. 由于$\int^{+\infty} F(x)dx < +\infty$，故可取定某 $b > a$，使$\int_b^{+\infty} F(x)dx < \frac{\varepsilon}{3}$. 对此 b，又可取 $\delta > 0$，使当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时，恒有

$$\left| \int_a^b f(x, y)dx - \int_a^b f(x, y_0)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时，恒有

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y)dx - \int_a^{+\infty} f(x, y_0)dx \right|$$

$$\leqslant \left| \int_a^b f(x, y)dx - \int_a^b f(x, y_0)dx \right|$$

$$+ \int_b^{+\infty} |f(x, y)|dx + \int_b^{+\infty} |f(x,y_0)|dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\int^{+\infty}F(x)dx+\int_b^{+\infty}F(x)dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\int_a^{+\infty}f(x,y_0)dx=\int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0}f(x,y)dx.$$

证毕.

注．本题中应假定：对任何 $b>a$，$f(x,y)$ 关于 x 在$[a,b]$上可积.

3776．利用积分符号与极限号互换，计算积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right]dx.$$

解 先证积分符号与极限号能互换．事实上，（1）函数$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$在 $0\leqslant x\leqslant A$ 上连续（任何 $A>0$），故它在$[0,A]$上可积；（2）又 $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ 在$[0,A]$上关于 n 为单调减小的，且

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}=e^{-x^2}$$

为连续函数，故按狄尼定理，当 $n\to\infty$ 时，函数

$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$在$[0, A]$上一致趋向于$e^{-x^2}$；(3) 由于$0<\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\leqslant\frac{1}{1+x^2}$ $(n=1,2,\cdots)$，且$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}<+\infty$，故积分$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx$关于$n$一致收敛．因此，我们可以应用积分符号与极限号的互换定理*)，从而得

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

而

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}=\sqrt{n}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n}$$
$$=\sqrt{n}\,I_n,$$

又由于

$$I_{n-1}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}$$
$$=\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}\Big|_0^{+\infty}+2(n-1)\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^n}dt$$
$$=2(n-1)I_{n-1}-2(n-1)I_n,$$

故得

$$I_n=\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.$$

又因$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$，将上式递推即得

$$I_n=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

于是，

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi\sqrt{n}}{2}.$$

根据瓦里斯公式，我们有

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)[(2n-1)!!]^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n-2)!!]^2}{(2n-1)[(2n-3)!!]^2}.$$

最后得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!\sqrt{n}}{(2n-2)!!}$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!\sqrt{2n-1}}{(2n-2)!!}\cdot\sqrt{\frac{n}{2n-1}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*) 参看菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷480目定理Ⅰ.

3777. 证明：积分

$$F(a)=\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}dx$$

是参数 a 的连续函数.

证 $F(a)=\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}dx=\int_{-a}^{+\infty} e^{-x^2}dx$

$$=\int_{-a}^{0} e^{-x^2}dx+\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

$$=\int_0^{a} e^{-x^2}dx+\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

由变上限积分的性质可知积分 $\int_0^a e^{-x^2}dx$ 是 a $(-\infty<a<+\infty)$ 的连续函数，故 $F(a)$也是 a $(-\infty<a<+\infty)$ 的连续函数.

3778. 求函数

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{x}dx$$

的不连续点. 作出函数 $y=F(a)$的图形.

解 当 $1-a^2>0$ 即$|a|<1$ 时，

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{(1-a^2)x}d[(1-a^2)x]$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

当 $1-a^2<0$ 即$|a|>1$ 时，

$$F(a)=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a^2-1)x}{(a^2-1)x}d[(a^2-1)x]$$

$$=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=-\frac{\pi}{2}.$$

当$1-a^2=0$

即$|a|=1$时，

$F(a)=0$.

于是，$a=\pm 1$为$F(a)$的不连续点。如图7·2所示。

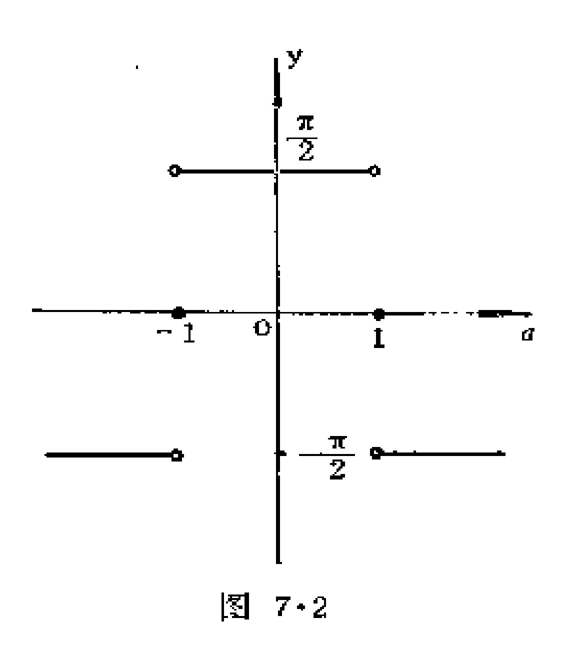


图 7·2

研究下列函数在所指定区间内的连续性：

3779. $F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^a}$当$a>2$.

解 对于积分$\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^a}$. 由于当$x\geqslant 1$时，

$$0<\frac{x}{2+x^a}<\frac{x}{x^a}\leqslant\frac{1}{x^{a_0-1}},$$

其中$a\geqslant a_0>2$，且积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{a_0-1}}$$

收敛，故积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^a}$$

对$a\geqslant a_0$一致收敛，从而积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^a}$$

对 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 一致收敛．因此，$F(\alpha)$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时连续．由于 $\alpha_0>2$ 的任意性，故知 $F(\alpha)$ 当 $\alpha>2$ 时连续．

3780． $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 当 $\alpha>0$．

解 对于任何 $A>1$，均有

$$\left|\int_1^A\cos x\,dx\right|\leqslant 2．$$

而函数 $\frac{1}{x^\alpha}$ 在 $x\geqslant 1$，$\alpha>0$ 时关于 x 单调递减，且由

$$0<\frac{1}{x^\alpha}\leqslant\frac{1}{x^{\alpha_0}}\quad(x\geqslant 1,\ \alpha\geqslant\alpha_0>0)$$

知：当 $x\to+\infty$ 时 $\frac{1}{x^\alpha}$ 在 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致趋于零．因此，由迪里黑里判别法知积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$$

对 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 一致收敛．于是，函数 $F(\alpha)$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时连续．由于 $\alpha_0>0$ 的任意性，故知 $F(\alpha)$ 当 $\alpha>0$ 时连续．

3781． $F(\alpha)=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}dx$ 当 $0<\alpha<2$．

解 $F(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}dx$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin(\pi-t)}{(\pi-t)^{\alpha}t^{\alpha}}dt$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx.$$

由于当 $0<\eta<1$，$0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1<2$ 时，有

$$\int_{0}^{\eta}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha}\int_{0}^{\eta}\frac{dx}{x^{\alpha-1}}\leqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha_0}\int_{0}^{\eta}\frac{dx}{x^{\alpha_1-1}}$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha_0}\frac{1}{2-\alpha_1}\cdot\eta^{2-\alpha_1},$$

故对于任给的 $\varepsilon>0$，当 $0<\eta<\delta=\min\left\{1,\ (2-\alpha_1)^{\frac{1}{2-\alpha_1}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\alpha_0}{2-\alpha_1}}\varepsilon^{\frac{1}{2-\alpha_1}}\right\}$时，对一切 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$皆有

$$\left|\int_{0}^{\eta}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx\right|\leqslant\int_{0}^{\eta}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx<\varepsilon.$$

因此，瑕积分 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx$ 当 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时

一致收敛．从而 $F(\alpha)$ 在 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 上连续．由 $0<\alpha_0<\alpha_1<2$ 的任意性即知 $F(\alpha)$ 在 $0<\alpha<2$ 上连续．

3782. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}dx$ 当 $0<\alpha<1$．

解 $F(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}dx$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^\alpha t}dt.$$

当 $0<\alpha\leqslant\alpha_0<1$ 时，

$$\int_0^{\pi}\frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^\alpha t}dt\leqslant e^{-n\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin^{\alpha_0}t}dt.$$

显然，积分

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sin^{\alpha_0}t}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin^{\alpha_0}t},$$

且 $\lim\limits_{t\to+0}t^{\alpha_0}\cdot\frac{1}{\sin^{\alpha_0}t}=1$，故它是收敛的．而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi}$ 为公比等于 $e^{-\pi}<1$ 的几何级数，它也收敛．于是，由外氏判别法知级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^{\alpha_0}t}dt.$$

对 $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ 一致收敛．从而，注意到被积函数是正的，即知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}dx$$

对 $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ 一致收敛．因此，$F(\alpha)$在 $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ 上连续．由 $\alpha_0<1$ 的任意性知 $F(\alpha)$ 当 $0<\alpha<1$ 时连续．

3783. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-x\alpha^2}dx$ 当 $-\infty<\alpha<+\infty$．

解 当 $\alpha\neq 0$ 时，

$$F(\alpha)=-\frac{1}{\alpha}e^{-x\alpha^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\alpha},$$

显然它是连续的．

当 $\alpha=0$ 时，

$$F(0)=\int_0^{+\infty}0\cdot e^{-0}dx=0．$$

于是，显见 $F(\alpha)$当 $\alpha=0$ 时不连续．

§3．广义积分中的变量代换．广义积分号下微分法及积分法

1° 对参数的微分法　若 1）函数 $f(x,y)$ 于域 $a\leqslant x<+\infty$，$y_1<y<y_2$ 内是连续的并对参数 y 可微分；2）$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 收敛；3）$\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$ 于区间 (y_1,y_2)内一致收敛，则当 $y_1<y<y_2$时

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$$

（莱布尼兹法则）．

2° 对参数积分的公式　若1）函数 $f(x,y)$ 当 $x\geqslant a$ 及 $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 时是连续的；2）$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在有穷的区间 (y_1, y_2) 内一致收敛，则

$$\int_{y_1}^{y_2}dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\int_a^{+\infty}dx\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)dy. \tag{1}$$

若 $f(x,y)\geqslant 0$，则公式（1）在假定等式（1）的一端有意义时，对于无穷的区间 (y_1, y_2) 也正确.

3784. 利用公式

$$\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\ (n>0).$$

计算积分

$$I=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx,\text{ 其中 } m \text{ 为自然数.}$$

解　$\dfrac{dx^{n-1}}{dn}=x^{n-1}\ln x$（$n>0$ 为任意实数）. 积分

$$\int_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx \tag{1}$$

对于 $n\geqslant n_0>0$ 为一致收敛. 事实上，当 $0<x\leqslant 1$，$n\geqslant n_0>0$ 时，

$$|x^{n-1}\ln x|\leqslant -x^{n_0-1}\ln x,$$

而积分 $\int_0^1 x^{n_0-1}\ln x\,dx$ 显然收敛 *). 因此，由外氏

判别法即知积分（1）对$n\geqslant n_0>0$一致收敛．于是，积分

$$\int_0^1 x^{n-1}dx$$

对参数$n\geqslant n_0$求导数时，积分号与导数符号可交换，即

$$\frac{d}{dn}\int_0^1 x^{n-1}dx=\int_0^1\frac{dx^{n-1}}{dn}dx$$

$$=\int_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx.$$

由$n_0>0$的任意性知，上式对任意$n>0$均成立．

同理对n逐次求导数，也可在积分号下求导数，即

$$\frac{d^2}{dn^2}\int_0^1 x^{n-1}dx=\int_0^1\frac{d}{dn}(x^{n-1}\ln x)dx$$

$$=\int_0^1 x^{n-1}\ln^2 x\,dx,$$

……

由数学归纳法，可得

$$\frac{d^m}{dn^m}\int_0^1 x^{n-1}dx=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx.$$

但是，$\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n}$　（$n>0$），故有

$$\frac{d^m}{dx^m}\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}.$$

从而得

$$\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}.$$

*）利用2362题的结果。

3785．利用公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\quad(a>0),$$

计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}，\text{其中 } n \text{ 为自然数．}$$

解 $\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)=-\frac{1}{(x^2+a)^2}$．积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2} \tag{1}$$

对 $a\geqslant a_0>0$ 一致收敛．事实上，当 $x\geqslant 0$，$a\geqslant a_0>0$ 时，

$$\frac{1}{(x^2+a)^2}\leqslant\frac{1}{(x^2+a_0)^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a_0)^2}$ 显然收敛．因此，由外氏判别法知积分（1）当 $a\geqslant a_0>0$ 时一致收敛．于是，利用莱布尼兹法则，即得

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}.$$

由 $a_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $a>0$ 均成立。

同理对积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}$ 逐次求导数，得

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=(-1)^n n!\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}.$$

但是，

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right)$$

$$=-\frac{\pi}{2^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^3}},$$

$$\frac{d^2}{da^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{d}{da}\left(-\frac{\pi}{2^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^3}}\right)$$

$$=\frac{1\cdot 3\pi}{2^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^5}},$$

……

由数学归纳法，可得

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{(2n-1)!!\pi}{2^{n+1}}(-1)^n\cdot a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)},$$

最后得

$$I=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

3786．证明迪里黑里积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

当 $\alpha\neq 0$ 时有导函数，但不能利用莱布尼兹法则来求它.

证 当 $\alpha>0$ 时，令 $\alpha x=y$，得

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2}.$$

当 $\alpha<0$ 时，$I(\alpha)=-I(-\alpha)=-\frac{\pi}{2}$，于是，当 $\alpha\neq 0$ 时，$I'(\alpha)=0$.

但是，如果利用莱布尼兹法则来求，即得错误的结果. 事实上，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)dx=\int_0^{+\infty}\cos\alpha x\,dx$$

发散，而 $I'(\alpha)=0$（$\alpha\neq 0$）存在，因此，本题不能应用莱布尼兹法则求 $I'(\alpha)$.

3787. 证明：函数

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx$$

在区域 $-\infty<\alpha<+\infty$ 内连续并且可微分的.

证 设 α_0 为 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点. 记 $M=\max(|\alpha_0-1|,|\alpha_0+1|)$，则当 $x>M$，$\alpha\in(\alpha_0-1,\alpha_0+1)$ 时，恒有

$$\left|\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+(x-M)^2},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]\right|=\left|\frac{2(x+\alpha)\cos x}{[1+(x+\alpha)^2]^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{2}{1+(x-M)^2}.$$

由于积分$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(x-M)^2}$收敛，故积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx$$

及
$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]dx$$

在(α_0-1,α_0+1)内一致收敛，从而$F(\alpha)$在(α_0-1,α_0+1)内连续且可微分，且可在积分号下求导数．由α_0的任意性，即知$F(\alpha)$在$(-\infty,+\infty)$内连续且可微分．

3788．从等式

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$$

出发，计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\quad(a>0,\ b>0).$$

解 不妨设$a<b$．注意到e^{-xy}在域：$x\geqslant 0$，$a\leqslant y\leqslant b$上连续．又积分$\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$对$a\leqslant y\leqslant b$是一致收敛的．事实上，当$x\geqslant 0$，$a\leqslant y\leqslant b$时，

$$0<e^{-xy}\leqslant e^{-ax},$$

但积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ 收敛．故积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx$ 是一致收敛的．于是，利用对参数的积分公式，即得

$$\int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy}dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-xy}dx.$$

上式左端为 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$，右端为 $\int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a}$．从而得

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \ln\frac{b}{a} \quad (a>0,\ b>0).$$

3789．证明傅茹兰公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

$$= f(0)\ln\frac{b}{a} \quad (a>0,\ b>0),$$

式中 $f(x)$ 为连续函数及积分 $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ 对任何的 $A>0$ 都有意义．

证 对任何的 $A>0$，有

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

$$= \int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}dx - \int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}dx$$

$$= \int_{Aa}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{Ab}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$$

$$=\int_{Aa}^{Ab}\frac{f(t)}{t}dt=f(\xi)\int_{Aa}^{Ab}\frac{dt}{t}$$

$$=f(\xi)\ln\frac{b}{a}\quad(Aa<\xi<Ab).$$

当 $A\to+0$ 时，$\xi\to+0$. 由 $f(x)$在 $x=0$ 点的连续性，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

利用傅茹兰公式，计算积分：

3790. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx\quad(a>0,\ b>0)$.

解 由于 $\cos x$ 在 $[0,\ +\infty)$ 内连续，且对任何 $A>0$，积分 $\int_A^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 存在，故由傅茹兰公式，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx$$

$$=\cos 0\cdot\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}.$$

3791. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}dx\quad(a>0,\ b>0)$.

解 同3790题，由于 $\sin 0=0$，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}dx=0.$$

3792. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx \quad (a>0, b>0)$.

解 令 $f(x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x$，则 $f(x)$ 在$0 \leqslant x < +\infty$上连续.

由于 $f(x)>0$ 且（利用洛比塔法则）

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{x^{-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1,$$

故对任何 $A>0$，积分 $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 都收敛。因此由傅茹兰公式，有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} ax\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} bx\right)}{x} dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a},$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} ax-\operatorname{arc\,tg} bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}.$$

利用对参数的微分法计算下列积分：

3793. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha>0, \beta>0)$.

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{-2\alpha x\,e^{-\alpha x^2}+2\beta x\,e^{-\beta x^2}}{1}=0,$$

故 $x=0$ 不是瑕点。又由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\alpha x^2}}-\frac{x}{e^{\beta x^2}}\right)=0,$$

故对任何 $\alpha>0$，$\beta>0$ 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$ 都收敛。今将 $\beta>0$ 固定，而把所求积分视为含参变量 α（$\alpha>0$）的积分，即令

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx\quad(\alpha>0).$$

而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right)dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}x\,e^{-\alpha x^2}dx.$$

下证右端积分在 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时一致收敛。事实上，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$0\leqslant x<+\infty$ 时，$0\leqslant x\,e^{-\alpha x^2}\leqslant x\,e^{-\alpha_0 x^2}$，而积分 $\int_0^{+\infty}x\,e^{-\alpha_0 x^2}dx=\frac{1}{2\alpha_0}$ 收敛，故积分

$\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx$ 在 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 时一致收敛．因此，当 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 时，可在积分号下对参数求导数：

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha},$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知，上式对一切 $\alpha > 0$ 皆成立．积分之，得

$$I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln \alpha + C \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

其中 C 为待定的常数．在此式中令 $\alpha = \beta$，并注意到 $I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx = 0$，即得

$$0 = I(\beta) = -\frac{1}{2}\ln \beta + C,$$

由此知 $C = \frac{1}{2}\ln \beta$．于是，

$$I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln \alpha + \frac{1}{2}\ln \beta = \frac{1}{2}\ln \frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha > 0),$$

即

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx = \frac{1}{2}\ln \frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha > 0, \ \beta > 0).$$

注．本题中，实际应考察积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(x, \alpha) dx$，

其中 $f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}, & \text{当} 0 < x < +\infty \text{时}, \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时}. \end{cases}$

易知 $f(x,\alpha)$ 是 $0\leqslant x<+\infty$，$0<\alpha<+\infty$ 上的连续函数（$\beta>0$ 固定）．我们证明：

$f'_\alpha(x,\alpha)=-x\,e^{-\alpha x^2}$ $(0\leqslant x<+\infty,0<\alpha<+\infty)$。事实上，当 $0<x<+\infty$ 时，此式显然成立。由于 $f(0,\alpha)\equiv 0$ $(0<\alpha<+\infty)$，故 $f'_\alpha(0,\alpha)=0$ $(0<\alpha<+\infty)$．因此，上式当 $x=0$ 时也成立．$f'_\alpha(x,\alpha)$ 显然是 $0\leqslant x<+\infty$，$0<\alpha<+\infty$ 上的连续函数．

在以下许多题中，我们都应作此理解，但不必写出 $f(x,\alpha)$。函数 $\dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}$ 就代表 $f(x,\alpha)$（$x=0$ 时规定其函数值为其极限值 0），而公式

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right)=-x\,e^{-\alpha x^2}$$

当 $x=0$ 时也成立（如上述）．这样，才严格符合莱布尼兹法则（积分号下求导数）的条件．

另外，本题若利用逐次积分来作可更简单一些．今作如下：易知（不妨设 $\alpha<\beta$）

$$\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=\int_\alpha^\beta x\,e^{-yx^2}dy,$$

而积分 $\int_0^{+\infty}x\,e^{-yx^2}dx$ 当 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 时一致收敛（因为 $0\leqslant x\,e^{-yx^2}\leqslant x\,e^{-\alpha x^2}$，而 $\int_0^{+\infty}x\,e^{-\alpha x^2}dx$ 收敛），故可交换积分次序，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta x e^{-yx^2}dy$$

$$=\int_\alpha^\beta dy\int_0^{+\infty}x e^{-yx^2}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\frac{dy}{2y}=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

3794. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx\quad(\alpha>0,\ \beta>0)$

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{-\alpha e^{-\alpha x}+\beta e^{-\beta x}}{1}=\beta-\alpha,$$

故 $x=0$ 不是瑕点，又由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2=0,$$

故积分 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx$ 收敛（$\alpha>0$，$\beta>0$）.

同样，将 $\beta>0$ 固定，考虑含参变量 α 的积分：

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx\quad(\alpha>0).$$

由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx$$

$$=-2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}dx$$

$$=-2\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}{}^{*)}\quad(\alpha>0).$$

而当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$， $1\leqslant x<+\infty$时，

$$\left|\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\right|\leqslant\frac{2e^{-\alpha_0 x}}{x},$$

且 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha_0 x}}{x}dx$ 收敛$\left(因为 \lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{e^{-\alpha_0 x}}{x}=0\right)$，

故 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛，

从而 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛

$\Big($注意，因为 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}=\beta-\alpha$，故 $x=0$

不是瑕点$\Big)$．因此，根据莱布尼兹法则，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$时可在积分号下求导数：

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx$$

$$=-2\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $\alpha>0$ 皆成立。

积分之，并注意到

$$\int \ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}d\alpha=\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}+\beta\ln(\alpha+\beta)+C,$$

即得

$$I(\alpha)=-2\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}-2\beta\ln(\alpha+\beta)+C_1,$$

其中 C_1是待定常数。令 $\alpha=\beta$，则由于 $I(\beta)=0$，得

$$0=-2\beta\ln\frac{2\beta}{2\beta}-2\beta\ln 2\beta+C_1,$$

故 $C_1=2\beta\ln 2\beta$. 于是，得

$$I(\alpha)=\ln\left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{2\alpha}-2\beta\ln(\alpha+\beta)+2\beta\ln 2\beta$$

$$=\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}},$$

即

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx$$

$$=\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}\quad(\alpha>0,\ \beta>0).$$

*) 利用3788题的结果.

3795. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx\quad(\alpha>0,\ \beta>0)$.

解 当 $m=0$时，

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx=0,$$

故下设 $m\neq 0$. 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx=0,$$

故 $x=0$ 不是瑕点，从而被积函数在域：$0\leqslant x<+\infty$ 及 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$ 内连续（$x=0$ 时的函数值理解为极限值）. 又由于

$$\left|\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\right|\leqslant\frac{e^{-\alpha x}+e^{-\beta x}}{x}\quad(x>0),$$

而积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}+e^{-\beta x}}{x}dx$ 收敛，故积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$ 收敛，从而积分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$$

收敛. 当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时，积分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\right)dx$$

$$=-\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin mx\,dx$$

是一致收敛的. 事实上，

$$|e^{-\alpha x}\sin mx|\leqslant e^{-\alpha_0 x}\quad(x\geqslant 0),$$

而积分 $\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha_0 x}dx=\frac{1}{\alpha_0}$ 收敛. 于是，对于积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$$

当$\alpha\geqslant\alpha_0$时可应用莱布尼兹法则，得

$$I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin mx\,dx=-\frac{m}{\alpha^2+m^2}\ ^{*)}.$$

由$\alpha_0>0$的任意性知，上式对一切$\alpha>0$均成立。从而

$$I(\alpha)=-\int\frac{m}{\alpha^2+m^2}d\alpha=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{m}+C,$$

其中C是待定常数。令$\alpha=\beta$，则得

$$I(\beta)=0=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}+C,$$

故 $C=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}$。最后得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{m}\quad(m\neq0).$$

*） 利用1829题的结果.

3796. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx\quad(\alpha>0,\ \beta>0)$.

解 同3795题，我们可证明：当$\alpha\geqslant\alpha_0>0$时，对积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx$$

可应用莱布尼兹法则，得

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\right)dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos mx\,dx=-\frac{\alpha}{\alpha^2+m^2}\ ^{*)}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $\alpha>0$ 均成立。从而

$$I(\alpha)=-\int\frac{\alpha\,d\alpha}{\alpha^2+m^2}=-\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+m^2)+C,$$

其中 C 是待定常数。令 $\alpha=\beta$，则得

$$I(\beta)=0=-\frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2)+C,$$

故 $C=\frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2)$。最后得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}\quad(\alpha>0,\ \beta>0).$$

*) 利用1828题的结果。

计算下列积分：

3797. $\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx\quad(|\alpha|\leqslant 1)$.

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{-\dfrac{2\alpha^2x}{1-\alpha^2x^2}}{2x}=-\alpha^2,$$

故 $x=0$ 不是瑕点．从而被积函数在域：$0\leqslant x<1$ 及 $|\alpha|\leqslant 1$ 内连续（$x=0$ 时的函数值理解为极限值）．又由于当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时，

$$\left|\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right|\leqslant-\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\quad(0<x<1),$$

而积分 $\int_0^1-\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$ 收敛$\Bigl($因为 $\lim_{x\to1-0}(1-x)^{\frac{2}{3}}$

$$\cdot\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to1-0}(1-x)^{\frac{1}{6}}\cdot\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1+x}}=0\Bigr),$$

故积分

$$\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$$

对 $|\alpha|\leqslant 1$ 一致收敛．从而为 α 的连续函数（$-1\leqslant\alpha\leqslant 1$）．另一方面，易知积分

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right]dx$$

$$=-2\alpha\int_0^1\frac{dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

对 $|\alpha|\leqslant\alpha_0<1$ 一致收敛．事实上，

$$\left|\frac{-2\alpha}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\right|$$

$$\leqslant\frac{2}{1-\alpha_0^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(0\leqslant x<1),$$

而积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$ 收敛。于是，对积分

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$$

当 $|\alpha|\leqslant\alpha_0$ 时可应用莱布尼兹法则，得

$$I'(\alpha)=-2\alpha\int_0^1 \frac{dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

由 $\alpha_0<1$ 的任意性知，上式对一切 $|\alpha|<1$ 均成立。先求不定积分

$$I_1=\int \frac{dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

作代换 $x=\sin t$，易得

$$I_1=\int \frac{dt}{1-\alpha^2\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{1-\alpha\sin t}+\int \frac{dt}{1+\alpha\sin t}\right).$$

再对右端两个积分作代换 $u=\operatorname{tg}\frac{t}{2}$，可得

$$\int \frac{dt}{1-\alpha\sin t}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+C_1,$$

$$\int \frac{dt}{1+\alpha\sin t}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+C_2 .$$

从而

$$I'(\alpha)-=2\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha\sin t}+\frac{1}{1+\alpha\sin t}\right)dt$$

$$=-\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\quad(|\alpha|<1).$$

两端积分，得

$$I(\alpha)=-\pi\int\frac{\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$=\pi\sqrt{1-\alpha^2}+C\quad(|\alpha|<1),$$

其中 C 是待定常数．令 $\alpha=0$，得

$$I(0)=0=\pi+C,$$

故 $C=-\pi$，从而

$$I(\alpha)=-\pi(1-\sqrt{1-\alpha^2})\ (|\alpha|<1).$$

在此式两端令 $\alpha\to1-0$ 及 $\alpha\to-1+0$ 取极限，并注意到 $I(\alpha)$在 $-1\leqslant\alpha\leqslant1$ 上的连续性，即得

$$I(1)=I(-1)=-\pi.$$

于是，当$|\alpha|\leqslant 1$时，

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=-\pi(1-\sqrt{1-\alpha^2}).$$

3798. $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (|\alpha|\leqslant 1)$.

解 同3797题，我们可以证明：

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

当$-1\leqslant\alpha\leqslant 1$时连续，且当$|\alpha|\leqslant\alpha_0<1$时可应用莱布尼兹法则．于是，

$$I'(\alpha)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx$$

$$=\int_0^1 \frac{-2\alpha x^2}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{2}{\alpha}\int_0^1 \frac{(1-\alpha^2x^2)-1}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{2}{\alpha}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$-\frac{2}{\alpha}\int_0^1 \frac{dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (|\alpha|\leqslant\alpha_0,\ \alpha\neq 0).$$

由 $\alpha_0<1$ 的任意性知，上式对一切 $0<|\alpha|<1$ 均成立。积分得

$$I(\alpha)=\int\left(\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\right)d\alpha$$

$$=\pi\ln|\alpha|+\pi\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right|+C$$

$$=\pi\ln(1+\sqrt{1-\alpha^2})+C,$$

其中 $|\alpha|<1$，$\alpha\neq0$，C 为待定常数。令 $\alpha\to0$，并注意到 $I(\alpha)$在 $\alpha=0$ 的连续性，即得

$$I(0)=0=\pi\ln2+C,$$

故 $C=-\pi\ln2$，从而得

$$I(\alpha)=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\quad(|\alpha|<1).$$

在上式中令 $\alpha\to1-0$ 及 $\alpha\to-1+0$，并注意到 $I(\alpha)$ 在 $-1\leqslant\alpha\leqslant1$ 上的连续性，即知上式当 $\alpha=\pm1$ 时也成立，即

$$\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\quad(|\alpha|\leqslant1).$$

3799. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

解 设 $I(\alpha)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.显然有 $I(0)=0$。

当 $\alpha>0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3}\cdot\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}}=\frac{\pi}{2}$，故 $I(\alpha)$收敛。其次，易知积分

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}}\right)dx$$

$$=\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\alpha^{2}x^{2})\sqrt{x^{2}-1}}$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{t^{2}dt}{\sqrt{1-t^{2}}(t^{2}+\alpha^{2})}$$

对 $\alpha\geqslant0$ 一致收敛。事实上，当 $\alpha\geqslant0$， $0\leqslant t<1$ 时，有

$$\left|\frac{t^{2}}{\sqrt{1-t^{2}}(t^{2}+\alpha^{2})}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-t^{2}}},$$

且 $\int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^{2}}}$ 收敛。于是，可应用莱布尼兹法则，得

$$I'(\alpha)=\int_{1}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}}\right)dx$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{t^{2}dt}{\sqrt{1-t^{2}}(t^{2}+\alpha^{2})}$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{(t^{2}+\alpha^{2})-\alpha^{2}}{\sqrt{1-t^{2}}(t^{2}+\alpha^{2})}dt$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^{2}}}$$

$$-\alpha^2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\alpha^2\cdot\frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\quad(\alpha\geqslant 0).$$

从而有

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\alpha-\frac{\pi}{2}\int\frac{\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\alpha-\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\alpha^2}+C\quad(\alpha\geqslant 0),$$

其中 C 为待定常数. 令 $\alpha=0$，得

$$I(0)=0=-\frac{\pi}{2}+C,$$

故 $C=\frac{\pi}{2}$. 于是，当 $\alpha\geqslant 0$ 时,

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{\pi}{2}(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}).$$

当 $\alpha<0$ 时,

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$=-\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}(-\alpha)x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$=-\frac{\pi}{2}(1-\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}).$$

于是，当$-\infty<\alpha<+\infty$时，

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2})\operatorname{sgn}\alpha.$$

3800. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$.

解 我们首先计算积分

$$I_\beta(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}dx$$

（$\alpha\geqslant 0$是参数，$\beta>0$固定）.

首先注意，此积分当$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$（$\alpha_1>0$为任何有限数）时一致收敛. 事实上，当$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$时，

$$0\leqslant\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}$$

$$\leqslant\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{\beta^2+x^2}\quad(0\leqslant x<+\infty),$$

而积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{\beta^2+x^2}dx$收敛（因为易知

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{\beta^2+x^2}=0\Big).$$

于是，$I_\beta(\alpha)$是$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$上的连续函数. 由$\alpha_1>0$的任意性知，$I_\beta(\alpha)$当$0\leqslant\alpha<+\infty$时连续.

其次，易证积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\right]dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha^2x^2)}dx=\frac{\pi}{\alpha\beta+1}$$

当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时是一致收敛的．事实上，此时

$$0\leqslant\frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha^2x^2)}$$

$$\leqslant\frac{2\alpha_1x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}\quad(0\leqslant x<+\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha_1x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}dx$ 收敛．于是，根据莱布尼兹法则，当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时，可在积分号下求导数，得

$$I'_\beta(\alpha)=\frac{\pi}{\alpha\beta+1}.$$

由 α_1 与 α_0 的任意性知，上式对一切 $0<\alpha<+\infty$ 均成立．两端积分，得

$$I_\beta(\alpha)=\frac{\pi}{\beta}\ln(1+\alpha\beta)+C\quad(0<\alpha<+\infty),$$

其中 C 是某常数．在此式中令 $\alpha\to+0$ 取极限，并注意到 $I_\beta(\alpha)$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上连续，得

$$0=I_\beta(0)=0+C,$$

故 $C=0$．因此

$$I_\beta(\alpha)=\frac{\pi}{\beta}\ln(1+\alpha\beta)\quad(0\leqslant\alpha<+\infty).$$

对于所求积分，只要作适当变形即得．当 $\alpha>0$，$\beta>0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\ln\alpha+\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}x^2\right)}{\beta^2+x^2}dx$$

$$=2\ln\alpha\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\beta^2+x^2}$$

$$+\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}x^2\right)}{\beta^2+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi\ln\alpha}{\beta}+\frac{\pi}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha+\beta).$$

此式当 $\alpha=0$ 时也成立，只要在两端令 $\alpha\to+0$ 取极限即可．这是因为积分 $J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$

（$\beta>0$ 固定）当 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时一致收敛（易知

$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$ 与 $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$ 当 $0\leqslant\alpha$

$\leqslant\frac{1}{2}$ 时都一致收敛，事实上，

$$\left|\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\right|$$

$$\leqslant-\frac{2\ln x}{\beta^2+x^2}\quad\left(0<x\leqslant\frac{1}{2},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\right),$$

而 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{\beta^2+x^2}dx$收敛;

$$0\leqslant\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}$$

$$\leqslant\frac{\ln\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}{\beta^2+x^2}\quad\left(\frac{1}{2}\leqslant x<+\infty,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\right),$$

而 $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}{\beta^2+x^2}dx$ 收敛，故 $J(\alpha)$ 在点 $\alpha=0$（右）连续。

对于任意的 α 与 β（$\beta\neq 0$），有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(|\alpha|^2+x^2)}{|\beta|^2+x^2}dx=\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|).$$

注意，当 $\beta=0$ 时上式不成立，右端无意义，左端的积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{x^2}dx$ 易知是发散的。

3801. $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}dx$.

解 先设 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$．显然 $x=0$ 不是瑕点，因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}=\alpha\beta.$$

由于当 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$ 时，

$$\left|\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}\right|$$

$$<\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{x^2}\quad(1\leqslant x<+\infty),$$

而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，故积分

$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}dx$ 在 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$ 时一致收敛，从而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}dx$ 也在 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$ 时一致收敛．因此，函数

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}dx$$

是 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$ 上的二元连续函数。再考察两个积分

$$J(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}\right)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}dx,$$

$$K(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\right]dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}.$$

由于当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$，$\beta\geqslant 0$ 时 $\left|\frac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\right|<\frac{\pi}{2}$

$\cdot \frac{1}{x(1+\alpha_0^2x^2)}$ （$1 \leqslant x < +\infty$），而积分

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\alpha_0^2x^2)}$收敛，故积分$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}dx$

当 $\alpha \geqslant \alpha_0$，$\beta \geqslant 0$ 时一致收敛，从而积分

$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}dx$ 当 $\alpha \geqslant \alpha_0$，$\beta \geqslant 0$ 时也一致收敛

$\left(\text{因为} \lim\limits_{x\to+0}\frac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}=\beta\text{，故 } x=0 \text{ 不是瑕点}\right)$.

因此，$J(\alpha,\beta)$当 $\alpha \geqslant \alpha_0$，$\beta \geqslant 0$ 时连续，并且此时 $I(\alpha,\beta)$可在积分号下对 α 求导数，得

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}dx=J(\alpha,\beta). \quad (1)$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，（1）式对一切 $\alpha>0$，$\beta \geqslant 0$ 成立；并且 $J(\alpha,\beta)$是 $\alpha>0$，$\beta \geqslant 0$ 上的二元连续函数.

其次，由于当 $\beta \geqslant \beta_0 > 0$，$\alpha>0$ 时，

$$0<\frac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}$$

$$\leqslant \frac{1}{1+\beta_0^2x^2} \quad (0 \leqslant x < +\infty).$$

而积分$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\beta_0^2x^2}$收敛，故积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}$$

当 $\beta\geqslant\beta_0$，$\alpha>0$ 时一致收敛．因此，$K(\alpha,\beta)$是 $\alpha>0$，$\beta\geqslant\beta_0$上的连续函数，并且(1)式中的积分 当 $\beta\geqslant\beta_0$（$\alpha>0$）时可在积分号下对 β 求导数，得

$$I''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=J'_\beta(\alpha,\beta)$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}$$

$$=\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\alpha^2x^2}$$

$$-\frac{\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\beta^2x^2}$$

$$=\frac{\alpha\pi}{2(\alpha^2-\beta^2)}-\frac{\beta\pi}{2(\alpha^2-\beta^2)}$$

$$=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)},$$

由 $\beta_0>0$ 的任意性知，对任何 $\alpha>0$，$\beta>0$ 均有

$$I''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=J'_\beta(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}. \qquad (2)$$

（注意，在推导此式时应设 $\alpha\neq\beta$，因为推导过程中分母内有 $\alpha^2-\beta^2$．但由于 $K(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha>0$，$\beta>0$ 上的连续函数，故通过取极限即知（2）式当 $\alpha=\beta$ 时也成立）．在（2）式中固定 $\alpha>0$，对 β 积分，得

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=J(\alpha,\beta)$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\beta)+C(\alpha)\ (0<\beta<+\infty),$$

其中 $C(\alpha)$是依赖于 α 的常数．在此式中令 $\beta\to+0$，并注意到 $J(\alpha,\beta)$在 $\alpha>0$，$\beta\geqslant0$上连续，得

$$0=J(\alpha,0)=\lim_{\beta\to+0}J(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln\alpha+C(\alpha),$$

故

$$C(\alpha)=-\frac{\pi}{2}\ln\alpha.$$

因此，

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\quad(\alpha>0,\ \beta>0).$$

再固定 $\beta>0$，对 α 积分（右端利用分部积分法），得

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$$

$$+\frac{\pi}{2}\beta\ln(\alpha+\beta)+C^*(\beta),$$

其中 $C^*(\beta)$是依赖于 β 的常数．在此式中令 $\alpha\to+0$，并注意到 $I(\alpha,\beta)$在 $\alpha\geqslant0$，$\beta\geqslant0$ 上连续，得

$$0=I(0,\beta)=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha,\beta)$$

$$=\frac{\pi}{2}\beta\ln\beta+C^*(\beta),$$

故

$$C^*(\beta)=-\frac{\pi}{2}\beta\ln\beta,$$

于是，

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\beta^\beta}\quad(\alpha>0,\ \beta>0).$$

显然，对于任何α与β，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}dx$$

$$=\begin{cases}\operatorname{sgn}(\alpha\beta)\cdot\frac{\pi}{2}\ln\frac{(|\alpha|+|\beta|)^{|\alpha|+|\beta|}}{|\alpha|^{|\alpha|}\cdot|\beta|^{|\beta|}}, & \text{当}\alpha\beta\neq 0\text{时；}\\ 0, & \text{当}\alpha\beta=0\text{时。}\end{cases}$$

3802. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}dx$。

解 先设$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$．首先，注意，$x=0$不是瑕点，因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}=\alpha^2\beta^2.$$

由于当$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$，$0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$时，恒有

$$0\leqslant\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}$$

$$\leqslant\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^4},$$

而$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^4}dx$收敛（因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^4}=0\Big)，$$

故积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}dx$当$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$，$0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$时一致收敛．因此，函数

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}dx \quad (1)$$

是 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$， $0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$上的二元连续函数．由 $\alpha_1>0$，$\beta_1>0$的任意性知，$I(\alpha,\beta)$是$\alpha\geqslant0$，$\beta\geqslant0$上的二元连续函数．再考察两个积分

$$J(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\right]dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2(1+\alpha^2x^2)}dx, \quad (2)$$

$$K(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2(1+\alpha^2x^2)}\right]dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}dx$$

$$=\frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha+\beta}\quad(\alpha>0,\ \beta>0). \quad (3)$$

由于当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$， $0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$时，恒有

$$0\leqslant\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2(1+\alpha^2x^2)}$$

$$\leqslant\frac{2\alpha_1\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^2(1+\alpha_0^2x^2)}\quad(0<x<+\infty),$$

而易知积分$\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha_1\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^2(1+\alpha_0^2x^2)}dx$收敛，故(2)式中的积分在 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$， $0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$上一致收敛．由此可知$J(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$， $0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$上的连续函数，并且在其上（1）中的积分可在积分号

下对α求导数，得

$$I'_{\alpha}(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2(1+\alpha^2x^2)}dx$$

$$=J(\alpha,\beta). \qquad (4)$$

由 $\alpha_1>\alpha_0>0$ 及 $\beta_1>0$ 的任意性知，$J(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha>0$，$\beta\geqslant 0$ 上的连续函数，并且（4）式对一切 $\alpha>0$，$\beta\geqslant 0$ 都成立．

其次，当 $0<\alpha\leqslant\alpha_1$，$0<\beta_0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$时，恒有

$$0<\frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}$$

$$\leqslant\frac{4\alpha_1\beta_1}{1+\beta_0^2x^2}\quad(0<x<+\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{4\alpha_1\beta_1}{1+\beta_0^2x^2}dx$ 收敛，故（3）式中的积分在 $0<\alpha\leqslant\alpha_1$，$0<\beta_0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$上一致收敛．于是，在其上（2）式中的积分可在积分号下对β求导数，得

$$I''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=J'_{\beta}(\alpha,\beta)$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}dx$$

$$=\frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha+\beta}. \qquad (5)$$

由 $\alpha_1>0$，$\beta_1>\beta_0>0$ 的任意性知，（5）式对一切 $\alpha>0$，$\beta>0$ 都成立．（5）式两端对β积分之（$\alpha>0$固定），得

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=J(\alpha,\beta)$$
$$=2\pi\alpha\beta-2\pi\alpha^2\ln(\alpha+\beta)+C(\alpha)$$
$$(0<\beta<+\infty),$$
其中 $C(\alpha)$是依赖于 α 的常数．在此式中令 $\beta\to+0$，取极限，并注意到 $J(\alpha,\beta)$ 在 $\alpha>0$，$\beta\geqslant0$ 上连续，得

$$0=J(\alpha,0)=\lim_{\beta\to+0}J(\alpha,\beta)$$
$$=-2\pi\alpha^2\ln\alpha+C(\alpha),$$

故

$$C(\alpha)=2\pi\alpha^2\ln\alpha.$$

因此，

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=2\pi\alpha\beta-2\pi\alpha^2\ln(\alpha+\beta)+2\pi\alpha^2\ln\alpha$$
$$(\alpha>0,\ \beta>0).$$

两端再对 α 积分（$\beta>0$ 固定），得

$$I(\alpha,\beta)=\pi\alpha^2\beta-\frac{2}{3}\pi\alpha^3\ln(\alpha+\beta)$$
$$+\frac{2\pi}{9}(\alpha+\beta)^3-\pi\alpha^2\beta$$
$$-\frac{2}{3}\pi\beta^3\ln(\alpha+\beta)+\frac{2}{3}\pi\alpha^3\ln\alpha$$
$$-\frac{2\pi}{9}\alpha^3+C^*(\beta)\quad(0<\alpha<+\infty),$$

其中 $C^*(\beta)$ 是依赖于 β 的常数．在此式两端令 $\alpha\to+0$ 取极限，并注意到 $I(\alpha,\beta)$ 在 $\alpha\geqslant0$，$\beta\geqslant0$ 上连续，得

$$0=I(0,\beta)=\lim_{\alpha\to+0} I(\alpha,\beta)$$

$$=\frac{2\pi}{9}\beta^3-\frac{2}{3}\pi\beta^3\ln\beta+C^*(\beta),$$

故

$$C^*(\beta)=-\frac{2}{9}\pi\beta^3+\frac{2}{3}\pi\beta^3\ln\beta.$$

于是

$$I(\alpha,\beta)=-\frac{2}{3}\pi(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)$$

$$+\frac{2\pi}{9}(\alpha+\beta)^3-\frac{2\pi}{9}\alpha^3$$

$$-\frac{2}{9}\pi\beta^3+\frac{2}{3}\pi(\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta)$$

$$=\frac{2\pi}{3}[\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta$$

$$-(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)]\quad(\alpha>0,\ \beta>0).$$

因此，对任意的α，β有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}dx$$

$$=\begin{cases}\frac{2\pi}{3}[|\alpha\beta|(|\alpha|+|\beta|)+|\alpha|^3\ln|\alpha| \\ \quad+|\beta|^3\ln|\beta|-(|\alpha|^3+|\beta|^3)\ln(|\alpha| \\ \quad+|\beta|)], & \text{当 } \alpha\beta\neq 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } \alpha\beta=0 \text{ 时.}\end{cases}$$

3803. 从公式

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty}x\,e^{-x^2y^2}dy$$

出发，计算尤拉－普阿桑积分

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx.$$

解 在积分

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

中令 $x=ut$，其中 u 为任意正数，即得

$$I=u\int_0^{+\infty}e^{-u^2t^2}dt.$$

在上式两端乘以 $e^{-u^2}du$，再对 u 从 0 到 $+\infty$ 积分，得

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du\int_0^{+\infty}u\,e^{-u^2t^2}dt. \qquad (1)$$

由于被积函数 $u\,e^{-(1+t^2)u^2}$ 是非负的连续函数，并且积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2(1+t^2)}$$

及

$$\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}u\,dt=e^{-u^2}\cdot I$$

分别对于 t 及 u 是连续的，积分互换后的逐次积分显然存在。于是，(1)式中的积分顺序可以互换*)，并且

有

$$I^2=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

由于 $I>0$，故

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*) 参看菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷483目定理V的系理.

利用尤拉-普阿桑积分，求下列积分之值：

3804. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx\quad(a>0,\ ac-b^2>0)$ *).

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{a}[(ax+b)^2+ac-b^2]}dx$$

$$=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{a}(ax+b)^2}dx$$

$$=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

*) 只要假定 $a>0$，条件 $ac-b^2>0$ 可去掉。

3805. $\int_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$

$(a>0,\ ac-b^2>0)$ *).

解 设 $\frac{1}{\sqrt{a}}(ax+b)=t$，则 $x=\frac{\sqrt{a}\,t-b}{a}$. 代入得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\frac{a_1}{a}t^2+\frac{2(ab_1-a_1b)}{a\sqrt{a}}t$$

$$+\frac{a_1b^2-2abb_1}{a^2}+c_1\Big]e^{-t^2}dt.$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t\,d(e^{-t^2})$$

$$=-\frac{1}{2}te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}dt=0$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

故得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1x^2+2b_1x+c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\left[\frac{a_1}{a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a_1b^2-2abb_1}{a^2}+c_1\right)\sqrt{\pi}\right]$$

$$=\frac{(a+2b^2)a_1-4abb_1+2a^2c_1}{2a^2}$$

$$\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

*) 只要假定 $a>0$，条件 $ac-b^2>0$ 可去掉.

3806. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch} bx\,dx \quad (a>0)$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch} bx\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}(e^{bx}+e^{-bx})dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2-bx)}dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}\ ^{*)}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

*） 利用3804题的结果。

3807. $\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx$ $(a>0)$.

解 由于积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故利用2355题的结果，即得

$$\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx$$

$$=e^{2a}\int_0^{+\infty}e^{-\left(x+\frac{a}{x}\right)^2}dx$$

$$=e^{2a}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+4a)}dx$$

$$=e^{-2a}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}.$$

3808. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

解 由分部积分法知

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}(e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2})d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$-2\int_0^{+\infty}(\alpha e^{-\alpha x^2}-\beta e^{-\beta x^2})dx$$

$$=-2\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\,e^{-(\sqrt{\alpha}x)^2}d(\sqrt{\alpha}x)$$

$$+2\int_0^{+\infty}\sqrt{\beta}\,e^{-(\sqrt{\beta}x)^2}d(\sqrt{\beta}x)$$

$$=-2\sqrt{\alpha}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}+2\sqrt{\beta}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$=\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}).$$

3809. $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx \quad (a>0)$.

解 令 $I(b)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx$.由于$e^{-ax^2}\cos bx$与$\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2}\cos bx)=-xe^{-ax^2}\sin bx$都是$x\geqslant 0$, $-\infty<b<+\infty$上的连续函数，并且此时

$$|e^{-ax^2}\cos bx|\leqslant e^{-ax^2},$$

$$|xe^{-ax^2}\sin bx|\leqslant xe^{-ax^2},$$

而积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx$与$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}dx$都收敛，故积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx$与$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bx\,dx$都在$-\infty<b<+\infty$上一致收敛，从而可在积分号下求导

数，得

$$I'(b)=-\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2}\sin bx\,dx$$

$$(-\infty<b<+\infty).$$

利用分部积分法，得

$$\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2}\sin bx\,dx$$

$$=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

$$=\frac{b}{2a}I(b),$$

故 $I'(b)=-\frac{b}{2a}I(b)\quad(-\infty<b<+\infty).$

于是，

$$\int\frac{I'(b)}{I(b)}db=-\frac{1}{2a}\int b\,db,$$

即

$$\ln I(b)=-\frac{b^2}{4a}+C\quad(-\infty<b<+\infty),$$

其中 C是待定常数，也即

$$I(b)=C_1 e^{-\frac{b^2}{4a}}\quad(-\infty<b<+\infty),$$

其中 C_1也是待定常数。但

$$I(0)=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

代入，得 $C_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$。于是，最后得

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

$$=I(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (-\infty<b<+\infty).$$

3810. $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2}\sin bx\,dx \quad (a>0)$.

解 $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2}\sin bx\,dx$

$$=-\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\sin bx\,d(e^{-ax^2})$$

$$=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

$$=\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

$$=\frac{b}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}} \text{ *)}.$$

*) 利用3809题的结果。

3811. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$ （n 为自然数）．

解 由3809题得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}. \quad (1)$$

积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial b^k}(e^{-x^2} \cos 2bx) dx$

$$= 2^k \int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2} \cos\left(2bx + \frac{k\pi}{2}\right) dx, \quad (2)$$

而 $\left| x^k e^{-x^2} \cos\left(2bx + \frac{k\pi}{2}\right)\right| \leqslant x^k e^{-x^2}$ （$x \geqslant 0$）．

但是积分 $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2} dx$ 对于任意的自然数 k 均收敛，故积分（2）当 $-\infty < b < +\infty$ 时一致收敛．因此，（1）式的左端可在积分号下求任意次导数，从而可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^{2n}}{\partial b^{2n}}(e^{-x^2} \cos 2bx) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} 2^{2n} x^{2n} e^{-x^2} \cos(2bx + n\pi) dx$$

$$= 2^{2n} (-1)^n \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{d^{2n}}{db^{2n}}(e^{-b^2}),$$

即

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$$

$$=(-1)^n \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \frac{d^{2n}}{db^{2n}}(e^{-b^2}).$$

3812．从积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

出发，计算迪里黑里积分

$$D(\beta)=\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx.$$

解 先设 $\beta>0$．将 β 固定，α 视为参变量．仿3760题的证法，可知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ 当 $\alpha \geqslant 0$ 时一致收敛，从而 $I(\alpha)$是 $\alpha \geqslant 0$ 上的连续函数（注意，上述积分中 $x=0$ 不是瑕点，因为 $\lim\limits_{x \to +0} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}=\beta$）．由于

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\right) dx$$

$$=-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x\, dx=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

易知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x\, dx$ 当 $\alpha \geqslant \alpha_0>0$ 时一致收敛（因为此时 $|e^{-\alpha x} \sin \beta x| \leqslant e^{-\alpha_0 x}$，而 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} dx$

收敛），故知当 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ 可在积分号下求导数，得

$$I'(\alpha) = -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知，上式对一切 $0 < \alpha < +\infty$ 皆成立。两端对 α 积分，得

$$I(\alpha) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta} + C \quad (0 < \alpha < +\infty), \qquad (1)$$

其中 C 是某常数． 由 $|\sin u| \leqslant |u|$ 知

$$|I(\alpha)| \leqslant \beta \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{\beta}{\alpha} \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

由此可知 $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = 0$．在（1）式两端令 $\alpha \to +\infty$ 取极限，得 $0 = -\frac{\pi}{2} + C$，故 $C = \frac{\pi}{2}$。于是，

$$I(\alpha) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\pi}{2} \quad (0 < \alpha < +\infty). \qquad (2)$$

在（2）式两端令 $\alpha \to +0$ 取极限，并注意到 $I(\alpha)$ 当 $\alpha \geqslant 0$ 时连续，即得

$$D(\beta) = I(0) = \lim_{\alpha \to +0} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

当 $\beta < 0$ 时，$D(\beta) = -D(-\beta) = -\frac{\pi}{2}$．又显然有 $D(0) = 0$．综上所述，有

$$D(\beta)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta.$$

利用迪里黑里和傅茹兰积分，求下列积分之值：

3813. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx \quad (\alpha>0)$.

解 令 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$. 首先注意到 $x=0$ 不是瑕点，因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{-2\alpha xe^{-\alpha x^2}+\beta\sin\beta x}{2x}=\frac{\beta^2}{2}-\alpha.$$

由于

$$\left|\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\right|\leqslant\frac{2}{x^2}\quad(x>0),$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$ 在 $-\infty<\beta<+\infty$ 上一致收敛，从而 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$ 也在 $-\infty<\beta<+\infty$ 上一致收敛．于是，$I(\beta)$ 是 $-\infty<\beta<+\infty$ 上的连续函数．下设 $\beta>0$．由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\right)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 在 $\beta\geqslant\beta_0>0$ 上一致收敛（因为当 $x\to+\infty$ 时 $\frac{1}{x}$ 单调递减趋于零，而 $\left|\int_0^A\sin\beta x\,dx\right|=\left|\frac{1-\cos\beta A}{\beta}\right|\leqslant\frac{2}{\beta_0}$，故由迪里黑里判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 当 $\beta\geqslant\beta_0$ 时一致收敛）．于是，当 $\beta\geqslant\beta_0$ 时，可在积分号下求导数，得

$$I'(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.^{*)}\qquad(1)$$

由 $\beta_0>0$ 的任意性知，（1）式对一切 $\beta>0$ 皆成立．于是

$$I(\beta)=\frac{\pi}{2}\beta+C\quad(0<\beta<+\infty),\qquad(2)$$

其中 C 是某常数．在（2）式两端令 $\beta\to+0$ 取极限，并注意到 $I(\beta)$ 在 $-\infty<\beta<+\infty$ 上的连续性，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-1}{x^2}dx=I(0)=\lim_{\beta\to+0}I(\beta)=C.\qquad(3)$$

根据3808题结果知

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$$

$$=\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})\quad(\alpha>0,\ \beta>0).\qquad(4)$$

令 $J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$ $(\alpha>0)$，仿上

面之证，易知$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$当$\beta\geqslant 0$时一致收敛，故$J(\beta)$是$\beta\geqslant 0$上的连续函数．于是，在（4）式两端令$\beta\to+0$取极限，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-1}{x^2}dx=J(0)$$

$$=\lim_{\beta\to+0}J(\beta)=-\sqrt{\pi\alpha}\quad(\alpha>0),$$

以此代入（3）式，得$C=-\sqrt{\pi\alpha}$．于是，

$$I(\beta)=\frac{\pi}{2}\beta-\sqrt{\pi\alpha}\quad(0\leqslant\beta<+\infty).$$

当$\beta<0$时，$I(\beta)=I(-\beta)=\frac{\pi}{2}(-\beta)-\sqrt{\pi\alpha}$．

总之，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}|\beta|-\sqrt{\pi\alpha}\quad(\alpha>0).$$

*）利用3812题的结果．

3814. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|^{*)}.$$

*) 利用3790题的结果.

3815. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x-\sin(\beta-\alpha)x}{x}\,dx$$

$$=\begin{cases}0, & 若|\alpha|<|\beta|\ ^{*)};\\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha, & 若|\alpha|=|\beta|\ ^{**)};\\ \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha, & 若|\alpha|>|\beta|^{***)}.\end{cases}$$

*) 利用3791题的结果.

) 及 *) 利用3812题的结果.

3816. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}dx$

解 由于 $\sin 3\alpha x=3\sin\alpha x-4\sin^3\alpha x$, 故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{3\sin\alpha x-\sin 3\alpha x}{4x}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^{*)}=\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha.$$

*） 利用3812题的结果．

3817. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx$.

解 令$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx$. 先设 $\alpha\geqslant 0$.

显然 $x=0$不是瑕点，因为 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2=\alpha^2$.

而由于 $\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2\leqslant\frac{1}{x^2}$，又$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，故

$\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx$ 在 $\alpha\geqslant 0$ 上一致收敛，从而

$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx$ 在 $\alpha\geqslant 0$ 时一致收敛.因此，$I(\alpha)$

是 $\alpha\geqslant 0$ 上的连续函数.

又因

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

而积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$时一致收敛

（参看3813题的解题过程），故当 $\alpha\geqslant\alpha_0$时可在积分号下求导数，得

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}; \qquad (1)$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，（1）式对一切 $\alpha>0$ 皆成立．两端积分，得

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\alpha-C\quad(0<\alpha<+\infty),$$

其中 C 是某常数．在上式两端令 $\alpha\to+0$ 取极限，并注意到 $I(\alpha)$ 在 $\alpha\geqslant0$ 时的连续性知

$$0=I(0)=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha)=C.$$

于是 $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\alpha$（$0\leqslant\alpha<+\infty$）．当 $\alpha<0$ 时，显然，$I(\alpha)=I(-\alpha)=\frac{\pi}{2}(-\alpha)$，故对于任何 α，有

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx=I(\alpha)=\frac{\pi}{2}|\alpha|.$$

3818. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3dx$.

解 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3dx$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin^3\alpha x\,d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\sin^3\alpha x\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\alpha\sin^2\alpha x\cos\alpha x}{x^2}dx$$

$$=\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha x\cos\alpha x}{x^2}dx$$

$$=-\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\sin^2\alpha x\cos\alpha x\,d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{3\alpha}{2x}\sin^2\alpha x\cos\alpha x\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha x\cos^2\alpha x-\alpha\sin^3\alpha x}{x}dx$$

$$=\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha x}{x}dx$$

$$-\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\alpha\sin^3\alpha x}{x}dx$$

$$=3\alpha^2\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\frac{9}{2}\alpha^2\cdot\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha \quad ^{*)}$$

$$=\frac{3\pi}{8}\alpha^2\operatorname{sgn}\alpha=\frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|.$$

*) 利用3816题的结果。

3819. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$。

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$

$$=-\frac{1}{x}\sin^4 x\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3 x\cos x}{x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{(3\sin x-\sin 3x)\cos x}{x}dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx$$

$$=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

3820. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}dx$.

解 由于 $\sin^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3)$，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 4\alpha x-\cos 4\beta x}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2\alpha x-\cos 2\beta x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\ (\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0).$$

注 若 $\alpha=\beta=0$，显然积分为零；若 $\alpha=0\,(\beta\neq0)$ 或 $\beta=0\ (\alpha\neq 0)$，易知积分发散.

3821. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}dx$.

解 作代换 $x=\sqrt{t}$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{4}.$$

3822. $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}dx$ $(k\geqslant 0,\ \alpha>0,\ \beta>0)$.

解 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}dx$

$$=-\frac{1}{x}e^{-kx}\sin\alpha x\sin\beta x\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\{-ke^{-kx}\sin\alpha x\sin\beta x$$

$$+e^{-kx}(\alpha\sin\beta x\cos\alpha x+\beta\sin\alpha x\cos\beta x)\}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-kx}\frac{\alpha\sin\beta x\cos\alpha x+\beta\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx$$

$$-k\int_0^{+\infty}e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx.$$

由于

$$\int_0^{+\infty}e^{-kx}\frac{\alpha\sin\beta x\cos\alpha x}{x}dx$$

$$=\frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty}e^{-kx}\frac{\sin(\alpha+\beta)x-\sin(\alpha-\beta)x}{x}dx$$

$$=\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\beta}{k}\right)^{*)},$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-kx}\frac{\beta\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx$$

$$=\frac{\beta}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha+\beta}{k}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\beta}{k}\right),$$

且

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{[(e^{-kx}-1)+1]\cdot[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]}{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(e^{-kx}-1)\frac{\cos(\alpha-\beta)x}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(e^{-kx}-1)\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{x}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2+k^2}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2+k^2}{}^{**)}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(\alpha+\beta)^2+k^2}{(\alpha-\beta)^2+k^2},$$

故

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}dx$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\beta}{k}$$

$$+\frac{k}{4}\ln\frac{(\alpha-\beta)^2+k^2}{(\alpha+\beta)^2+k^2}.$$

*) 利用3812题的结果.

**) 易知3796题的结果当 $\alpha>0$，$\beta=0$ 时也成立.

3823. 对于不同的x值，求迪里黑里间断乘数

$$D(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda\cos\lambda x\frac{d\lambda}{\lambda},$$

作出函数$y=D(x)$的图形。

解 $D(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+x)\lambda+\sin(1-x)\lambda}{\lambda}d\lambda.$

当$|x|<1$时，$1+x>0$及$1-x>0$，利用3812题的结果，即得 $D(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=1$；

当$|x|=1$时，$1+x$及$1-x$中总有一个为零，一个为正值，即得$D(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$；

当$|x|>1$时，$(1+x)(1-x)<0$，即得$D(x)=0$. 如图7·3所示。

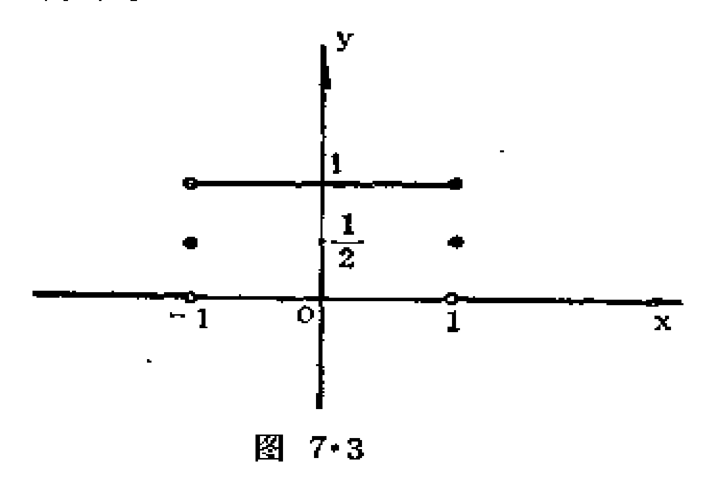


图 7·3

3824. 计算积分：

(a) $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x+b}dx$；

(б) $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+b} dx$.

解 (a) $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx$

$$= V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a(t-b)}{t} dt$$

$$= V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at \cos ab}{t} dt$$

$$- V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos at \sin ab}{t} dt$$

$$= 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin at}{t} \cos ab \, dt = \pi \operatorname{sgn} a \cos ab.$$

类似地，可求得

$$(б) \ V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+b} dx = \pi \operatorname{sgn} a \sin ab.$$

3825. 利用公式

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy,$$

计算拉普拉斯积分

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx.$$

解 $L = \int_0^{+\infty} \cos ax \, dx \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy$. 由于被积函数 $\cos ax \, e^{-y(1+x^2)}$ 是 $0 \leqslant x < +\infty$, $0 \leqslant y < +\infty$ 上的连续函数，并且绝对值的积分

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} |e^{-y(1+x^2)}\cos ax|\,dx$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy \int_0^{+\infty} e^{-yx^2}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}\,dy = \sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2} < +\infty,$$

故原逐次积分可交换积分顺序，得

$$L = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy \int_0^{+\infty} e^{-yx^2}\cos ax\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\,e^{-\frac{a^2}{4y}}\,dy \quad {}^{*)}$$

$$= \int_0^{+\infty} \sqrt{\pi}\,e^{-\left[t^2+\frac{1}{t^2}\left(\frac{|a|}{2}\right)^2\right]}\,dt$$

$$= \sqrt{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\cdot\frac{|a|}{2}} \;{}^{**)} = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}.$$

*) 利用3809题的结果.

**) 利用3807题的结果.

3826. 计算积分

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx.$$

解 由于$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\cos ax}{1+x^2}\right) = -\frac{x\sin ax}{1+x^2}$，故我们

考虑积分 $L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$. 由于 $\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$，而 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 收敛，故 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$ 当 $-\infty<\alpha<+\infty$ 时一致收敛. 又由于当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时，

$$\left|\int_0^A\sin\alpha x\,dx\right|=\left|\frac{1-\cos\alpha A}{\alpha}\right|\leqslant\frac{2}{\alpha_0},$$

而 $\frac{x}{1+x^2}$ 当 $x>1$ 时递减，且当 $x\to+\infty$ 时趋于零；于是，由迪里黑里判别法知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛. 因此，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时可在积分号下求导数，得

$$\frac{dL}{d\alpha}=-L_1. \qquad (1)$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，（1）式对一切 $\alpha>0$ 成立. 由3825题知 当 $\alpha>0$ 时 $L=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}$. 于是，由（1）式知

$$L_1=-\frac{dL}{d\alpha}=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}\quad(\alpha>0).$$

显然，当 $\alpha<0$ 时，

$$L_1=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(-\alpha)x}{1+x^2}dx=-\frac{\pi}{2}e^{\alpha};$$

而当 $\alpha=0$ 时，$L_1=0$ 。综上所述，有

$$L_1=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot e^{-|\alpha|}.$$

计算积分：

3827. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-2}\ {}^{*)}=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2}).$$

*) 利用3825题的结果。

3828. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx-\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x\cos\alpha x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x\cos\alpha x}{1+x^2}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x-\alpha x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$$

$$+\frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}-\frac{\pi}{4}e^{-|\alpha|}+\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot e^{-|\alpha|} \quad {}^{*)}$$

$$=\frac{\pi}{4}(1+|\alpha|)e^{-|\alpha|}.$$

*) 利用3825题与3826题的结果.

3829. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}dx \quad (a>0,\ ac-b^2>0)$.

解 $ax^2+2bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a^2}\right]$. 令

$$m=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a},\quad t=\frac{1}{m}\left(x+\frac{b}{a}\right)\ (m>0),$$

则 $ax^2+2bx+c=am^2(t^2+1)$,

$$\cos\alpha x=\cos\alpha\left(mt-\frac{b}{a}\right)$$

$$=\cos\alpha mt\cos\frac{b\alpha}{a}+\sin\alpha mt\sin\frac{b\alpha}{a}.$$

于是,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}dx$$

$$=\frac{1}{am}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha mt\cos\frac{b\alpha}{a}}{1+t^2}dt$$

$$+\frac{1}{am}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin amt\sin\frac{ba}{a}}{1+t^2}dt.$$

由于$\left|\frac{\cos amt}{1+t^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+t^2}$，而$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\pi$收敛，故积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos amt}{1+t^2}dt$收敛．同理，积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin amt}{1+t^2}dt$收敛．又由于$\frac{\cos amt}{1+t^2}$为偶函数，$\frac{\sin amt}{1+t^2}$为奇函数，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos amt}{1+t^2}dt$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos amt}{1+t^2}dt=\pi e^{-m|a|}\ ^{*)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin amt}{1+t^2}dt=0.$$

从而得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{ax^2+2bx+c}dx=\frac{1}{am}\cos\frac{ba}{a}\cdot\pi e^{-m|a|}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{ba}{a}e^{-\frac{|a|\sqrt{ac-b^2}}{a}}.$$

*) 利用3825题的结果.

3830．利用公式

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy\quad(x>0),$$

计算傅伦涅耳积分

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$$

及

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx.$$

解 在积分

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy$$

的两端乘以 $\sin x$，再在 $0<x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上积分，则得

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{x_1}dx\int_0^{+\infty}\sin x\cdot e^{-xy^2}dy.$$

由于 $|\sin x\cdot e^{-xy^2}|\leqslant e^{-x_0y^2}$，而 $\int_0^{+\infty}e^{-x_0y^2}dy$ 收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}\sin x\cdot e^{-xy^2}dy$ 对 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 一致收敛，从而可进行积分顺序的互换，得

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}dy\int_{x_0}^{x_1}\sin x\cdot e^{-xy^2}dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[-\frac{e^{-xy^2}(y^2 \sin x + \cos x)}{1+y^4} \right] \Bigg|_{x_0}^{x_1} dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x_0 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-x_0 y^2}}{1+y^4} dy$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x_0 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_0 y^2}}{1+y^4} dy$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x_1 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x_1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy.$$

上述等式右端的诸积分分别对 $0 \leqslant x_0 < +\infty$， $0 \leqslant x_1 < +\infty$都是一致收敛的（事实上，$e^{-x_0 y^2} \leqslant 1$，$e^{-x_1 y^2} \leqslant 1$，且积分 $\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4} dy$ 及 $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4}$均收敛）。于是，它们分别都是$x_0$，$x_1$（$0 \leqslant x_0 < +\infty, 0 \leqslant x_1 < +\infty$）的连续函数。从而让 $x_0 \to +0$，可在积分号下取极限，得

$$\int_0^{x_1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4}$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x_1 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-x_1 y^2}}{1+y^2} dy$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x_1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy.$$

由于上式右端的后两个积分均不超过积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x_1 y^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x_1}},$$

且 $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{x_1}} = 0$，故令 $x_1 \to +\infty$，即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

最后得

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

同法可得

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

求下列积分之值：

3831. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx \quad (a \neq 0)$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(at^2 + \frac{ac - b^2}{a}\right) dt$$

$$=\cos\frac{ac-b^2}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin at^2dt$$

$$+\sin\frac{ac-b^2}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos at^2dt$$

$$=\operatorname{sgn}a\cdot\cos\frac{ac-b^2}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin y^2dy$$

$$+\sin\frac{ac-b^2}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos y^2dy$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2|a|}}\Big(\operatorname{sgn}a\cdot\cos\frac{ac-b^2}{a}$$

$$+\sin\frac{ac-b^2}{a}\Big)^{*)}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}+\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}a\right).$$

*) 利用3830题的结果.

3832. $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cdot\cos 2ax\,dx.$

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cdot\cos 2ax\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\sin(x^2+2ax)+\sin(x^2-2ax)]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)+\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)\right]^{*)}$$

$$=\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)=\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}+a^2\right).$$

*) 利用3831题的结果.

3833. $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cdot\cos 2ax\,dx$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cdot\cos 2ax\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\cos(x^2+2ax)+\cos(x^2-2ax)]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\sin\left(x^2+2ax+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\sin\left(x^2-2ax+\frac{\pi}{2}\right)\Big]dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}-a^2+\frac{\pi}{4}\right)^{*)}$$

$$=\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}+a^2\right).$$

*) 利用3831题的结果.

3834. 证明公式:

1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{2a}\sin a\alpha\quad(\alpha\geqslant 0)$;

2) $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}dx=-\frac{\pi}{2}\cos a\alpha\quad(\alpha>0)$,

这里 $a\neq 0$，积分应了解为在哥西意义上的主值.

证 1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}dx$

$$=\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_0^{a-\eta}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}dx\right.$$

$$\left.+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_0^{a-\eta}\frac{\cos\alpha x}{a-x}dx\right.$$

$$+\int_0^{a-\eta}\frac{\cos\alpha x}{a+x}dx+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\cos\alpha x}{a-x}dx$$

$$\left.+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\cos\alpha x}{a+x}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[-\int_a^{\eta}\frac{\cos\alpha(a-t)}{t}dt\right.$$

$$+\int_a^{2a-\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$-\int_\eta^{A-a}\frac{\cos\alpha(t+a)}{t}dt$$

$$\left.+\int_{2a+\eta}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_\eta^{A-a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt\right.$$

$$+\int_{A-a}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$+\int_{2a+\eta}^{2a-\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$-\int_{\eta}^{A-a}\frac{\cos\alpha(t+a)}{t}dt\Big]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\Big[\int_{\eta}^{A-a}\frac{\cos\alpha(t-a)-\cos\alpha(t+a)}{t}dt$$

$$+\int_{A-a}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$-\int_{2a-\eta}^{2a+\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt\Big]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\int_{\eta}^{A-a}\frac{2\sin\alpha t\sin\alpha a}{t}dt$$

$$+\frac{1}{2a}\lim_{A\to+\infty}\int_{A-a}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$-\frac{1}{2a}\lim_{\eta\to+0}\int_{2a-\eta}^{2a+\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$=\frac{\sin a\alpha}{a}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}dt=\frac{\pi}{2a}\sin a\alpha\quad{}^{*)}.$$

2) $$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}dx$$

$$=\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\Big[\int_{0}^{a-\eta}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}dx$$

$$+\int_{a+\eta}^{A}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}dx\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\Big[\int_{0}^{a-\eta}\frac{\sin\alpha x}{x-a}dx$$

$$+\int_{0}^{a-\eta}\frac{\sin\alpha x}{x+a}dx+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\sin\alpha x}{x-a}dx$$

$$+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\sin\alpha x}{x+a}dx\Bigg]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\Bigg[\int_{-a}^{-\eta}\frac{\sin\alpha(t+a)}{t}dt$$

$$+\int_{a}^{2a-\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$+\int_{\eta}^{A-a}\frac{\sin\alpha(t+a)}{t}dt$$

$$+\int_{2a+\eta}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\Bigg]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\Bigg[\int_{\eta}^{a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$+\int_{a}^{2a-\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$+\int_{\eta}^{A-a}\frac{\sin\alpha(t+a)}{t}dt$$

$$+\int_{2a+\eta}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\Bigg]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\Bigg[\int_{\eta}^{A-a}\frac{\sin\alpha(t-a)+\sin\alpha(t+a)}{t}dt$$

$$+\int_{A-a}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$+\int_{2a+\eta}^{2a-\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\int_{\eta}^{A-a}\frac{2\sin\alpha t\cos\alpha a}{t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\int_{A-a}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{\eta\to+0}\int_{2a-\eta}^{2a+\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$=-\cos a\alpha\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}dt$$

$$=-\frac{\pi}{2}\cos a\alpha\ ^{*)}.$$

*）利用3812题的结果.

编者注：原题 1）应加上条件 $\alpha\geqslant 0$. 当 $\alpha<0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(-\alpha)x}{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{2a}\sin a(-\alpha)$$

$$=-\frac{\pi}{2a}\sin a\alpha.$$

原题 2）应加上条件 $\alpha>0$. 当 $\alpha=0$ 时等式显然不成立$\left(\text{左端等于}0\text{，右端等于}-\frac{\pi}{2}\right)$；当 $\alpha<0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{a^2-x^2}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(-a)x}{a^2-x^2}dx$$

$$=-\left[-\frac{\pi}{2}\cos a(-a)\right]=\frac{\pi}{2}\cos aa.$$

3835. 对于函数 $f(t)$，求拉普拉斯变换

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt \qquad (p>0).$$

设：

(a) $f(t)=t^n$ (n 为自然数)； (б) $f(t)=\sqrt{t}$；

(в) $f(t)=e^{\alpha t}$； (г) $f(t)=t\,e^{-at}$；

(д) $f(t)=\cos t$； (е) $f(t)=\frac{1-e^{-t}}{t}$；

(ж) $f(t)=\sin a\sqrt{t}$.

解 (a) $F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,t^n\,dt$

$$=-\frac{1}{p}e^{-pt}\,t^n\Big|_0^{+\infty}+\frac{n}{p}\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^{n-1}dt$$

$$=\frac{n}{p}\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^{n-1}dt$$

$$\overbrace{=\cdots=}^{n-1\text{次}}\frac{n!}{p^n}\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

(б) $F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sqrt{t}\,dt$

$$= -\frac{1}{p} e^{-pt} \sqrt{t} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}.$$

(в) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-p)t} dt.$

当 $p > \alpha$ 时，$F(p) = \frac{1}{p-\alpha}$；当 $p \leqslant \alpha$ 时，积分发散.

(г) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t\, e^{-\alpha t} dt$

$$= \int_0^{+\infty} t\, e^{-(p+\alpha)t} dt$$

$$= \frac{1}{(p+\alpha)^2} \quad (p+\alpha > 0)^{*)}.$$

*) 利用本题（a）的结果：$n = 1$.

(д) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos t\, dt$

$$= \frac{-p\cos t + \sin t}{p^2+1} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{p}{p^2+1}.$$

(e) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{1-e^{-t}}{t} dt.$

由于 $\lim\limits_{t\to+0}\frac{1-e^{-t}}{t}=1$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t}=0$，故函数 $\frac{1-e^{-t}}{t}$ 有界：

$$0<\frac{1-e^{-t}}{t}\leqslant M=\text{常数}\ (0<t<+\infty).$$

由此可知，当 $p>0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\frac{1-e^{-t}}{t}dt$ 收敛，并且

$$0<F(p)\leqslant M\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt$$

$$=\frac{M}{p}\quad(0<p<+\infty). \tag{1}$$

再考虑积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left(e^{-pt}\frac{1-e^{-t}}{t}\right)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-pt}(e^{-t}-1)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-(p+1)t}dt-\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt$$

$$=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\quad(p>0),$$

它对 $p\geqslant p_0>0$ 是一致收敛的．因此，当 $p\geqslant p_0$ 时，可对函数 $F(p)$ 应用莱布尼兹法则，得

$$F'(p)=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\ (\text{当}\,p\geqslant p_0\,\text{时}).$$

由 $p_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $p>0$ 均成立。两端积分，得

$$F(p)=\ln\frac{p+1}{p}+C \quad (0<p<+\infty), \qquad (2)$$

其中 C 是某常数．由（1）式知

$$\lim_{p\to+\infty}F(p)=0.$$

于是，在（2）式两端令 $p\to+\infty$，取极限，得 $C=0$。由此可知

$$F(p)=\ln\frac{p+1}{p}=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

(ж) $$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\alpha\sqrt{t}\,dt$$

$$=2\int_0^{+\infty}u\,e^{-pu^2}\sin\alpha u\,du$$

$$=\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}\ ^{*)}.$$

*) 利用3810题的结果。

3836．证明公式（李普希兹积分）

$$\int_0^{+\infty}e^{-at}J_0(bt)dt=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (a>0),$$

其中 $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi)d\varphi$ 为足指数是0的贝塞耳函数（参阅3726题）．

证 $$\int_0^{+\infty}e^{-at}J_0(bt)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-at}\,dt\int_0^{\pi}\cos(bt\sin\varphi)\,d\varphi.$$ 由于积分

$\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos(bt\sin\varphi)dt$ 对 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 是一致收敛的，故可交换积分顺序，得

$$\int_0^{+\infty}e^{-at}J_0(bt)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos(bt\sin\varphi)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{-a\cos(bt\cos\varphi)+b\sin\varphi\cdot\sin(bt\sin\varphi)}{a^2+b^2\sin^2\varphi}e^{-at}\Big|_0^{+\infty}\right)d\varphi$$

$$=\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a^2+b^2\sin^2\varphi}=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{a^2+b^2\sin^2\varphi}$$

$$=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{(a^2+b^2)\operatorname{tg}^2\varphi+a^2}$$

$$=\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(a^2+b^2)t^2+a^2}$$

$$=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,t}{a}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3837．求外耳什特拉斯变换

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}f(y)dy.$$

设：

(а) $f(y)=1$；　　　　(б) $f(y)=y^2$；

(в) $f(y)=e^{2ay}$；　　　　(г) $f(y)=\cos ay$。

解 (а)
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dy$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1\text{。}$$

(б)
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}y^2dy$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}(x+u)^2du$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}u^2du$$
$$+\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}u\,du$$
$$+\frac{x^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du\text{。}$$

由于
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}u^2du$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}u^2e^{-u^2}du=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}u\,d(e^{-u^2})$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}ue^{-u^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2},$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}u\,du=0,$$

故得

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=x^2+\frac{1}{2}.$$

(в) $$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}e^{2ay}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2+2ay}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{a^2+2ax}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x-a)^2}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{a^2+2ax}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$=e^{a^2+2ax}.$$

(г) $$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}\cos ay\,dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\cos a(x+u)du$$

$$=\frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\cos au\,du$$

$$-\frac{\sin ax}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\sin au\,du$$

$$=\frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{a^2}{4}}\,{}^{*)}-0$$

$$=e^{-\frac{a^2}{4}}\cos ax.$$

*) 利用3809题的结果.

3838. 契贝协夫—厄耳米特多项式由公式

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

而定义，证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx$$

$$=\begin{cases}0\quad, & 若\ m\neq n;\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & 若\ m=n.\end{cases}$$

证　由1231题的结果知，$H_n(x)$为一个n次多项式，且x^n的系数为2^n. 不妨设$m\leqslant n$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n H_m(x)\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})dx$$

$$=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)d\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})\right]$$

$$=(-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}H'_m(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})dx$$

$$=\cdots=(-1)^{n+m}\int_{-\infty}^{+\infty}H_m^{(m)}(x)\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(e^{-x^2})dx$$

$$=\cdots=(-1)^{2n}\int_{-\infty}^{+\infty}H_m^{(n)}(x)e^{-x^2}dx.$$

当 $m<n$ 时，$H_m^{(n)}(x)=0$，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=0;$$

当 $m=n$ 时，$H_m^{(n)}(x)=2^n n!$，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx$$

$$=2^n n!\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=2^n n!\sqrt{\pi}.$$

3839．计算在概率论中有重要意义的积分

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}}d\xi$$

$$(\sigma_1>0,\ \sigma_2>0).$$

解 注意到

$$\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}$$

$$=\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}[(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2-2\sigma_1^2x\xi+\sigma_1^2x^2],$$

并令

$$a=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},\qquad b=-\frac{\sigma_1^2x}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},$$

$$c=\frac{\sigma_1^2x^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},$$

即得

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(a\xi^2+2b\xi+c)}d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}\ ^{*)}.$$

将 a，b，c 的表达式代入上式，并令$\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$，化简整理得

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

*) 利用3804题的结果。

3840. 设函数 $f(x)$在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且绝对可积分 *)。证明：积分

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi$$

满足热传导方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初值条件

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=f(x).$$

证 当 $t>0$，$-\infty<x<+\infty$时，

$$\left|f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right|\leqslant|f(\xi)|,\text{ 而}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|\,d\xi$$

$<+\infty$，故积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi$ 在 $t>0$，

$-\infty<x<+\infty$上一致收敛，从而 $u(x,t)$是 $t>0$，$-\infty<x<+\infty$上的连续函数．考虑积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2}d\xi,\qquad(1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\frac{\xi-x}{2a^2t}d\xi,\qquad(2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\left[-\frac{1}{2a^2t}+\frac{(\xi-x)^2}{4a^4t^2}\right]d\xi,\qquad(3)$$

先考察（1）式中的积分：

由于对 $|x|\leqslant x_0$，$0<t_0\leqslant t\leqslant t_1$（$x_0$，$t_0$，$t_1$ 任意固定），当 $|\xi|>x_0$时，有

$$\left|f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\cdot\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2}\right|$$

$$\leqslant|f(\xi)|\cdot e^{-\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_1}}\cdot\frac{(|\xi|+x_0)^2}{4a^2t_0^2},$$

而

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} e^{-\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_1}} \cdot \frac{(|\xi|+x_0)^2}{4a^2t_0^2}=0,$$

故当$|\xi|>x_0$时，有

$$\left| f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \cdot \frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2} \right| \leqslant M|f(\xi)|,$$

其中M是某常数．于是，根据$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|d\xi<+\infty$，由外氏判别法知，（1）式中的积分在$|x|\leqslant x_0$，$0<t_0\leqslant t\leqslant t_1$上一致收敛．

同理可证，（2）式中的积分和（3）式中的积分都在$|x|\leqslant x_0$，$0<t_0\leqslant t\leqslant t_1$上一致收敛．于是，在其上可应用莱布尼兹法则在积分号下求导数，得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \left[\frac{(\xi-x)^2}{2a^2t}-1\right]d\xi, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \frac{\xi-x}{2a^2t}d\xi, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \left[\frac{(\xi-x)^2}{2a^2t}-1\right]d\xi. \quad (6)$$

由 x_0，t_0，t_1的任意性知，（4）、（5）、（6）三式对一切$-\infty<x<+\infty$，$t>0$都成立．根据（4）式及（6）式，即得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (-\infty<x<+\infty,\ t>0)．$$

下面证明

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=f(x)\ (-\infty<x<+\infty)．\qquad (7)$$

任意固定 x，易知$\left(t>0，作变量代换 u=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$=2a\sqrt{t}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=2a\sqrt{\pi t},$$

故

$$u(x,t)-f(x)$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(\xi)-f(x)]e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

任给 $\varepsilon>0$．根据 $f(x)$ 在点 x 的连续性，可取某 $\delta>0$，使当$|\xi-x|\leqslant\delta$时，恒有$|f(\xi)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$．我们有

$$u(x,\ t)-f(x)$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(\int_{-\infty}^{x-\delta}+\int_{x-\delta}^{x+\delta}\right.$$

$$+\int_{x+\delta}^{+\infty}\Big)[f(\xi)-f(x)]e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

下面分别估计 I_1，I_2与 I_3。我们有

$$|I_2|=\left|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x-\delta}^{x+\delta}[f(\xi)-f(x)]e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x-\delta}^{x+\delta}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\right)$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\right)=\frac{\varepsilon}{3}.$$

又有

$$|I_3|=\left|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x+\delta}^{+\infty}[f(\xi)-f(x)]e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}}\int_{x+\delta}^{+\infty}|f(\xi)|d\xi+\frac{|f(x)|}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x+\delta}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$\leqslant\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|d\xi$$

$$+\frac{|f(x)|}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\delta}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-u^2}du,$$

由此可知 $\lim\limits_{t\to+0}I_3=0$．同理可证 $\lim\limits_{t\to+0}I_1=0$．于是，存在 $\eta>0$，使当 $0<t<\eta$ 时，恒有

$$|I_3|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |I_1|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由此，当 $0<t<\eta$ 时，恒有

$$|u(x,t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

故（7）式成立．证毕．

*）编者注：本题原书把 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 误写为 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$．另外，原书只假定 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$上绝对可积，这是不够的．应加上假定 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续．否则，结论

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=f(x)$$

就可能不成立了．例如，令

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x=0 \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时，}\end{cases}$$

则显然 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$绝对可积．这时

$$u(x,t)\equiv 0\quad(t>0,\ -\infty<x<+\infty),$$

故 $$\lim_{t\to+0}u(0,t)=0\neq 1=f(0).$$

原

书

缺

页

709-740

第六章　多变量函数的微分法

§1.　多变量函数的极限.连续性

1°　多变量函数的极限　设函数$f(P)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在以$P_0$为聚点的集合$E$上有定义. 若对于任何的$\varepsilon>0$存在有$\delta=\delta(\varepsilon, P_0)>0$，使得只要$P\in E$及$0<\rho(P, P_0)<\delta$〔其中$\rho(P, P_0)$为$P$和$P_0$二点间的距离〕，则

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2°　连续性　若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数$f(P)$于P_0点是连续的.

若函数$f(P)$于已知域内的每一点连续，则称函数$f(P)$于此域内是连续的.

3°　一致连续性　若对于每一个$\varepsilon>0$都存在有仅与ε有关的$\delta>0$，使得对于域G中的任何点P'，P''，只要是

$$\rho(P', P'')<\delta,$$

便有不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$$

成立，则称函数$f(P)$于域G内是一致连续的.

于有界闭域内的连续函数于此域内是一致连续的。

确定并绘出下列函数存在的域：

3136. $u=x+\sqrt{y}$.

解 存在域为半平面，

$y\geqslant 0$,

如图 6·1 阴影部分所示，包括整个 Ox 轴在内。

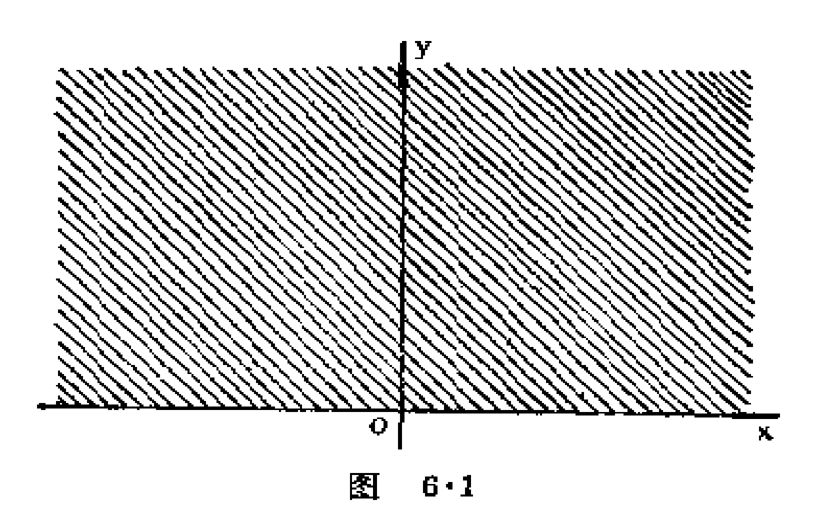


图 6·1

3137. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

解 存在域为满足不等式

$|x|\leqslant 1, |y|\geqslant 1$

的点集，如图 6·2 阴影部分所示，包括边界（粗实线）在内。

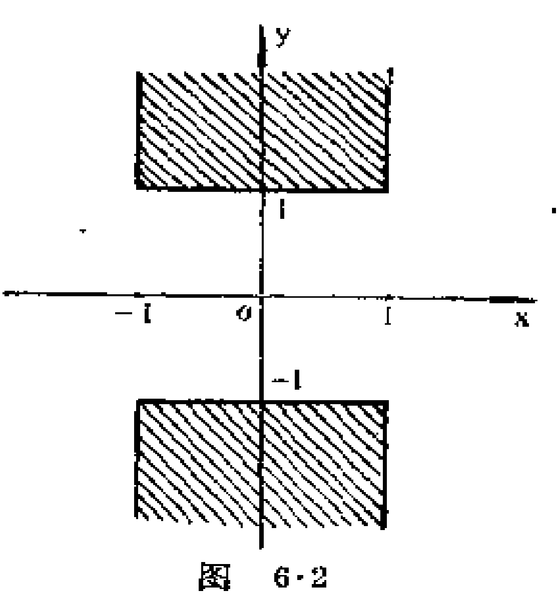


图 6·2

3138. $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解 存在域为圆

$$x^2+y^2\leqslant 1,$$

如图 6·3 阴影部分所示，包括圆周在内.

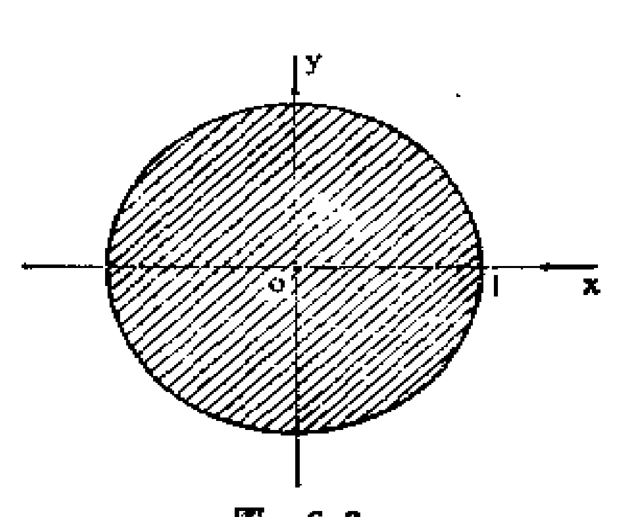


图 6·3

3139. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

解 存在域为满足不等式

$$x^2+y^2>1$$

的点集，即圆 $x^2+y^2=1$ 的外面，如图6·4 所示，不包括圆周（虚线）在内.

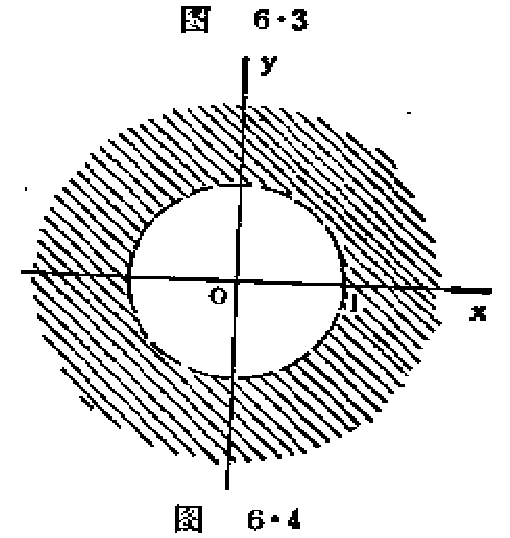


图 6·4

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

解 存在域为满足不等式

$$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$$

的点集，如图6·5所示的环，包括边界在内.

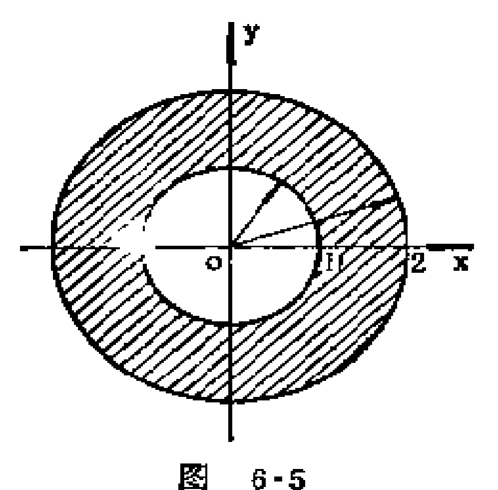


图 6·5

3141. $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解 存在域为满足不等式

$$x\leqslant x^2+y^2<2x$$

的点集．由 x^2+y^2

$\geqslant x$得出

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2+y^2<2x$ 得出

$(x-1)^2+y^2<1$，两者组成一月形，如图 6·6 阴影部分所示。

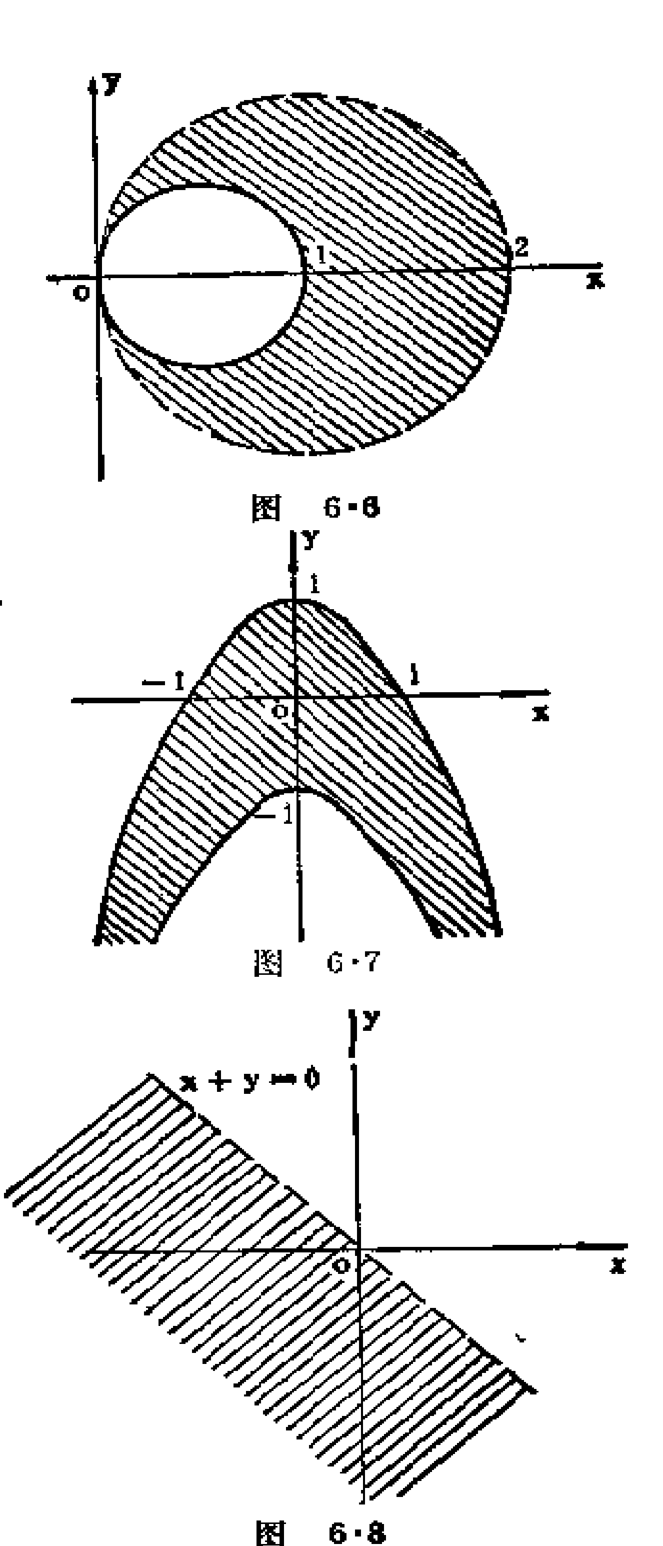


图 6·6

图 6·7

图 6·8

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$。

解 存在域为满足不等式

$$-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$$

的点集，如图 6·7 阴影部分所示，包括边界在内。

3143. $u=\ln(-x-y)$。

解 存在域为半平面

$$x+y<0,$$

如图 6·8 阴影部分所示，不包括直线 $x+y=0$ 在内。

3144. $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$。

解 存在域为满足

不等式

$$\left|\frac{y}{x}\right| \leqslant 1$$

或 $|y| \leqslant |x|$ $(x \neq 0)$ 的点集，这是一对对顶的直角，如图 6·9 阴影部分所示，不包括原点在内。

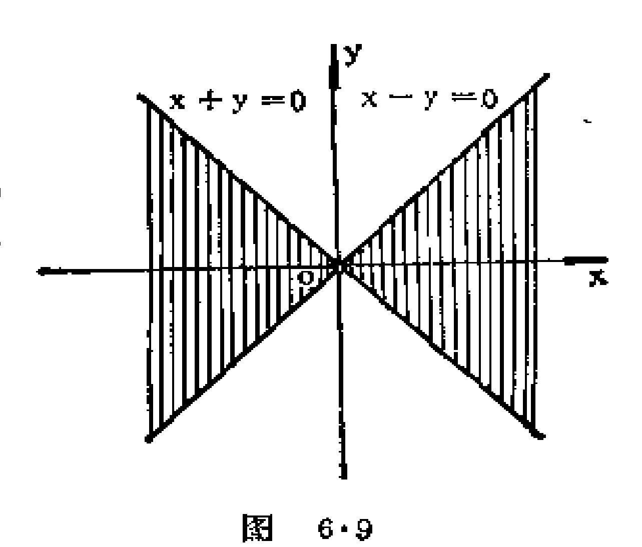


图 6·9

3145. $u = \arccos \dfrac{x}{x+y}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$$

的点集. 由 $\left|\dfrac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$ 得 $|x| \leqslant |x+y|$ $(x \neq -y)$，即 $x^2 \leqslant x^2 + 2xy + y^2$ 或 $y(y+2x) \geqslant 0$，也即

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ y \geqslant -2x, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y \leqslant 0, \\ y \leqslant -2x. \end{cases}$$

但 x，y 不能同时为零.这是由直线：$y = 0$ 和 $y = -2x$ 所围成的一对对顶的角，如图 6·10 阴影部分所示，包括边界在内，但不包括公共顶点 $O(0,0)$ 在内。

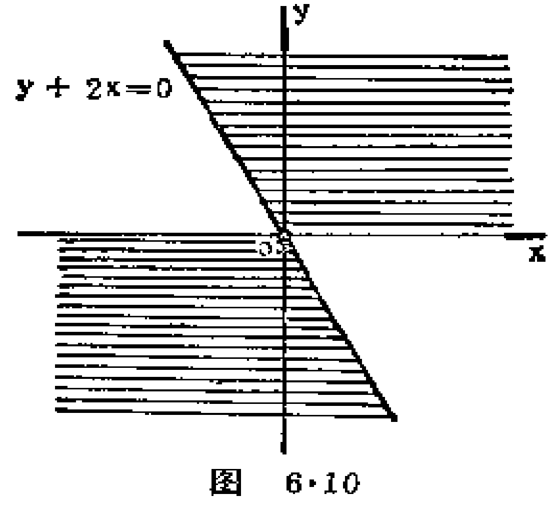


图 6·10

3146. $u=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{y^2}\right|\leqslant 1 \text{ 及 } |1-y|\leqslant 1\ (y\neq 0)$$

的点集，即

$$\begin{cases}y^2\geqslant x,\\0<y\leqslant 2\end{cases} \text{ 和 } \begin{cases}y^2\geqslant -x,\\0<y\leqslant 2.\end{cases}$$

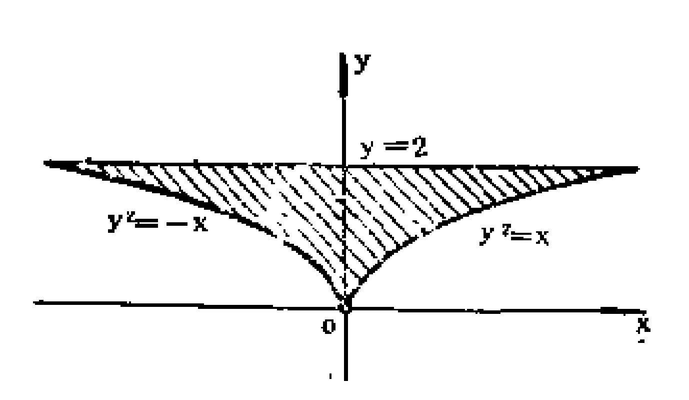
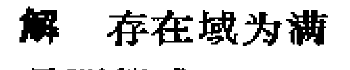


图 6·11

这是由抛物线：$y^2=x$，$y^2=-x$和直线$y=2$所围成的曲边三角形，如图6·11阴影部分所示，不包括原点在内。

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.



解 存在域为满足不等式

$\sin(x^2+y^2)\geqslant 0$

或$2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi$ ($k=0,1,2,\cdots$)的点集，如图6·12所示的同心环族。

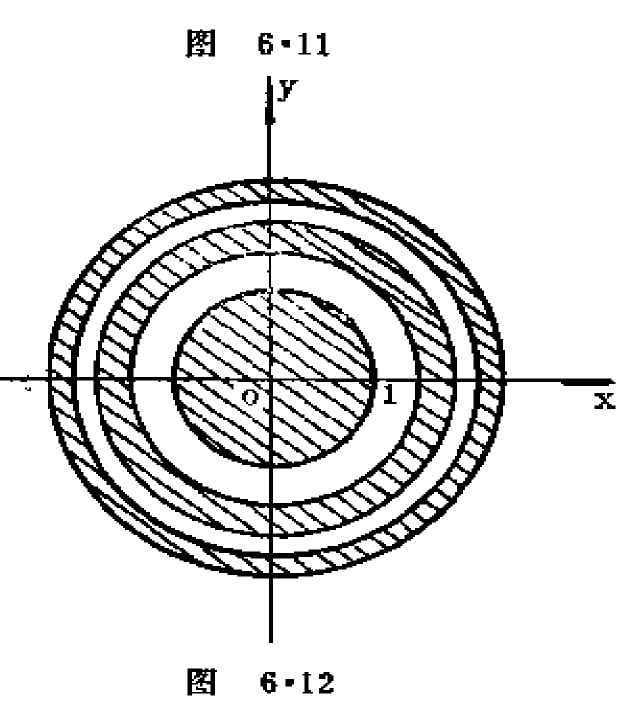


图 6·12

3148. $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

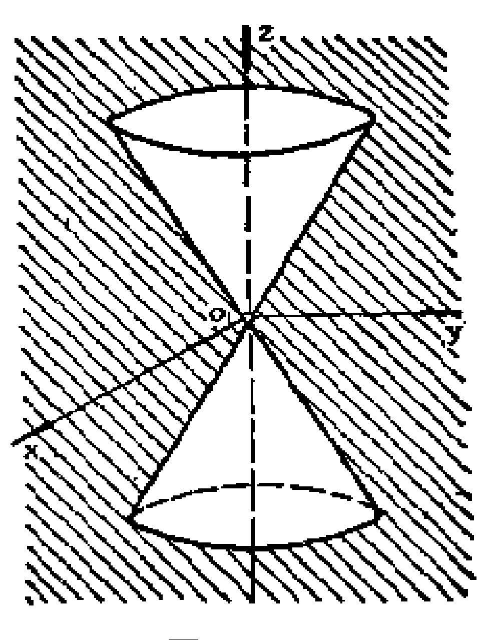


图 6·13

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$$

(x, y不同时为零)

或

$$x^2+y^2-z^2\geqslant 0$$

(x, y 不同时为零)

的点集，这是圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$ 的外面，如图6·13阴影部分所示，包括边界在内，但要除去圆锥的顶点.

3149. $u=\ln(xyz)$.

解 存在域为满足不等式

$$xyz>0$$

的点集，即

$x>0$, $y>0$, $z>0$; 或$x>0, y<0, z<0$;

$x<0, y<0, z>0$; 或 $x<0, y>0, z<0$.

其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体，但不包括坐标面. 由于图形为读者所熟知，故省略。以下有类似情况，不再说明.

3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解 存在域为满足不等式

$$-x^2-y^2+z^2>1$$

的点集．这是双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的内部，如图6·14阴影部分所示，不包括界面在内．

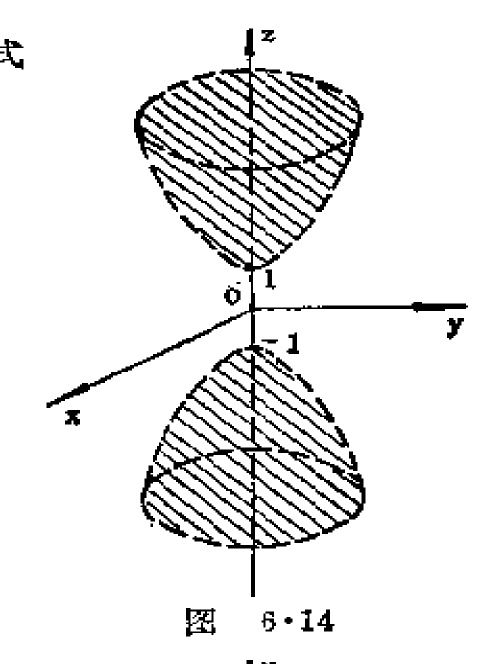


图 6·14

作出下列函数的等位线：

3151. $z=x+y$.

解 等位线为平行直线族

$$x+y=k,$$

其中 k 为一切实数，如图 6·15 所示．

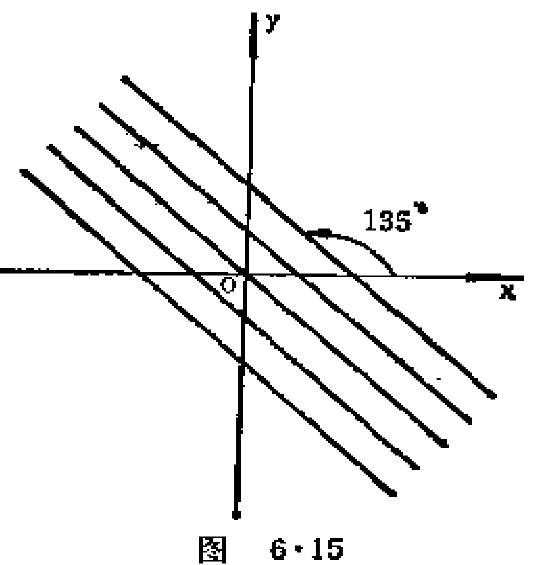


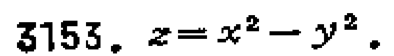
图 6·15

3152. $z=x^2+y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2+y^2=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$

当$a=0$时为原点；当$a>0$时，等位线为以原点为圆心的同心圆族．



3153. $z=x^2-y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2-y^2=k.$$

当 $k=0$ 时为两条互相垂直的直线：$y=x, y=-x$.

当$k\neq 0$时为以$y=\pm x$为公共渐近线的等边双曲线族，其中当$k>0$时顶点为$(-\sqrt{k},\ 0)$，$(\sqrt{k},\ 0)$，当$k<0$时顶点为$(0,-\sqrt{-k})$，$(0,\sqrt{-k})$。

3154. $z=(x+y)^2$.

解 等位线为曲线族

$$(x+y)^2=a^2\ (a\geqslant 0).$$

当$a=0$为直线$x+y=0$。当$a\neq 0$时为与直线$x+y=0$平行的且等距的直线$x+y=\pm a$。

3155. $z=\dfrac{y}{x}$.

解 等位线为以坐标原点为束心的直线束

$$y=kx\ (x\neq 0),$$

不包括Oy轴在内。

3156. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

解 等位线为椭圆族

$$x^2+2y^2=a^2\ (a>0).$$

长半轴为a，短半轴为$\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，焦点为$\left(-a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$及$\left(a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$。

3157. $z=\sqrt{xy}$.

解 等位线为曲线族

$$xy=a^2\ (a\geqslant 0).$$

当$a=0$时为坐标轴$x=0$及$y=0$。当$a>0$时为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等

边双曲线族，顶点为$(-a,-a)$及(a, a)。

3158. $z=|x|+y$.

解 等位线为曲线族

$$|x|+y=k,$$

其中k为一切实数.当$x\geqslant 0$时为$x+y=k$；当$x<0$时为$-x+y=k$。这是顶点在Oy轴上两支互相垂直的射线所构成的折线族，如图6·16所示。

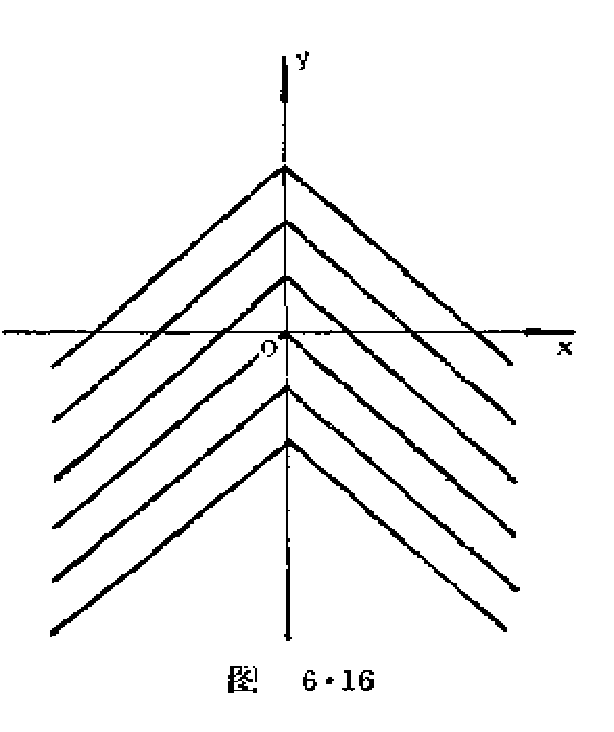


图 6·16

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

解 等位线为曲线族

$$|x|+|y|-|x+y|=a.$$

因为恒有 $|x|+|y|\geqslant|x+y|$，所以$a\geqslant 0$。

当$a=0$时，由$|x|+|y|=|x+y|$两边平方即得

$$xy\geqslant 0,$$

即为整个第一、第三象限，包括两坐标轴在内。

当$a>0$时，$xy<0$，分下面四组求解：

(1) $x>0, y<0$，$x+y\geqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得$y=-\frac{a}{2}$；

(2) $x>0, y<0, x+y\leqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得$x=\frac{a}{2}$；

(3) $x<0$, $y>0, x+y\geqslant 0, |x|+|y|-|x+y|=a$,解之得 $x=-\frac{a}{2}$;

(4) $x<0$, $y>0, x+y\leqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$, 解之得 $y=\frac{a}{2}$.

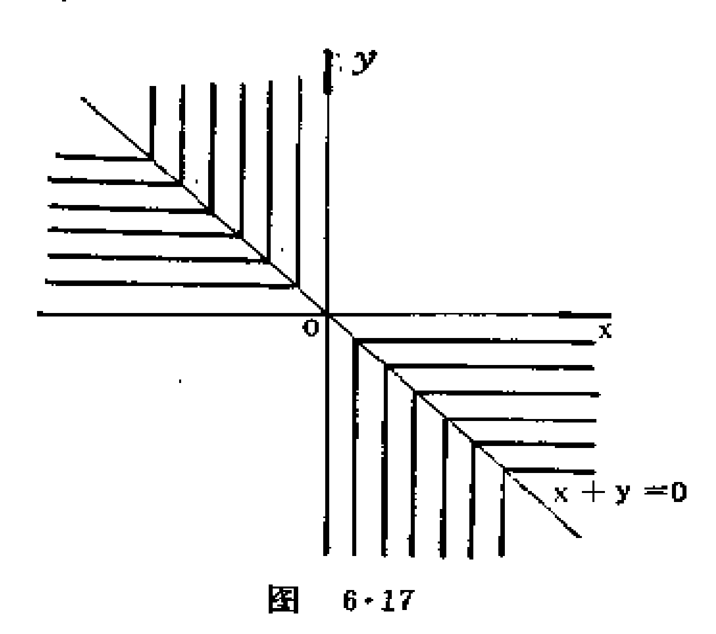


图 6·17

这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族，它的各射线平行于坐标轴，如图 6·17 所示。

3160. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2x}{x^2+y^2}=k\ (x,\ y\text{不同时为零}),$$

其中 k 为异于零的一切实数. 上式可变形为

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{k}\right)^2\ (k\neq 0).$$

当 $k=0$时，即得 $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}=1$,从而等位线为$x=0$即Oy轴，但不包括原点。

当$k\neq0$时为中心在Ox轴上且经过坐标原点（但不包括原点在内）的圆束，圆心在$\left(\frac{1}{k},0\right)$，半径为$\left|\frac{1}{k}\right|$，如图6·18所示。

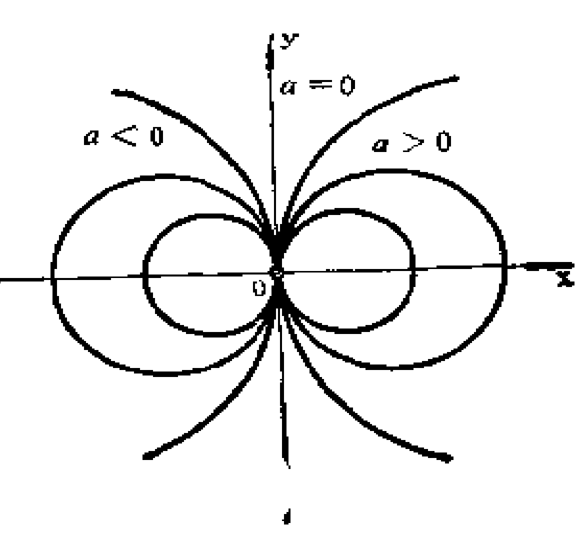
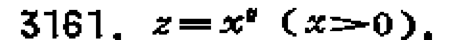


图 6·18



3161. $z=x^y$ $(x>0)$.

解 等位线为曲线族

$$x^y=a \quad (a>0).$$

当$a=1$时为直线$x=1$及Ox轴的正向半射线，但不包括原点在内。

当$0<a<1$与$a>1$时的图象如图6·19所示。

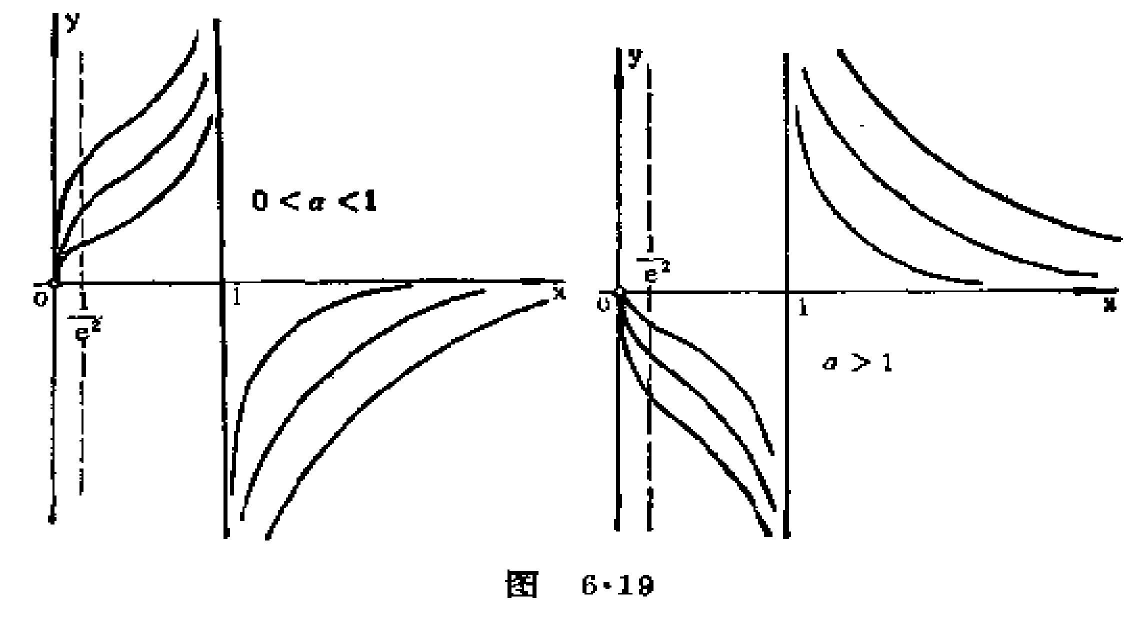


图 6·19

3162. $z=x^ye^{-x}$ $(x>0)$.

解 等位线为曲线族

$$x^y e^{-x}=a\ (a>0),$$

即

$$y\ln x-x=\ln a.$$

当 $a=e^{-1}$ 时为直线 $x=1$ 和曲线$y=\frac{x-1}{\ln x}$；当$0<a<\frac{1}{e}$，$\frac{1}{e}<a<1$或$a\geqslant 1$时图象布满整个右半平面，如图6·20所示，不包括Oy轴．

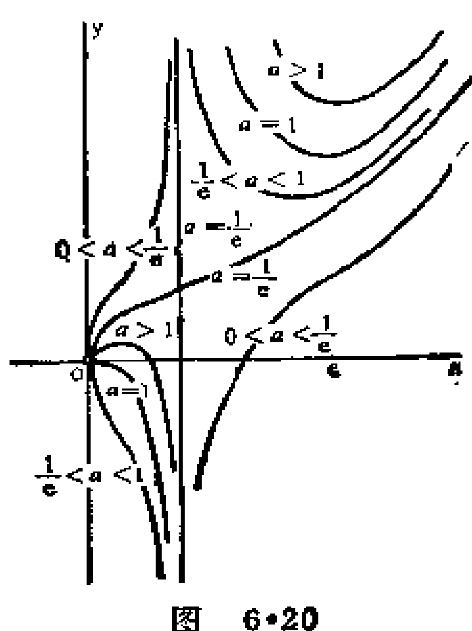


图　6·20

3163．$z=\ln\sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}}\ (a>0)$．

解　等位线为曲线族

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k^2\ (k>0).$$

整理得

$$(1-k^2)x^2-2a(1+k^2)x+(1-k^2)a^2+(1-k^2)y^2=0.$$

当 $k=1$ 时得 $x=0$，即 Oy 轴．当$k\neq 1$时，上述方程可变形为

$$\left[x-\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2+y^2=\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$

这是以点$\left(\frac{a(1+k^2)}{1-k^2},\ 0\right)$为圆心，半径为$\left|\frac{2ak}{1-k^2}\right|$

的圆族．当 $0<k<1$ 时，圆分布在右半平面；当 $k>1$ 时，圆分布在左半平面．

如果注意到圆心与原点距离的平方为

$$\left[\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2=\frac{a^2[(1-k^2)^2+4k^2]}{(1-k^2)^2}$$

$$=a^2+\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$

即等位线圆族与圆 $x^2+y^2=a^2$ 在交点处的半径互相垂直（或圆心距与两圆的半径构成直角三角形），便知等位线圆族与圆 $x^2+y^2=a^2$ 成正交．如图6·21所示．

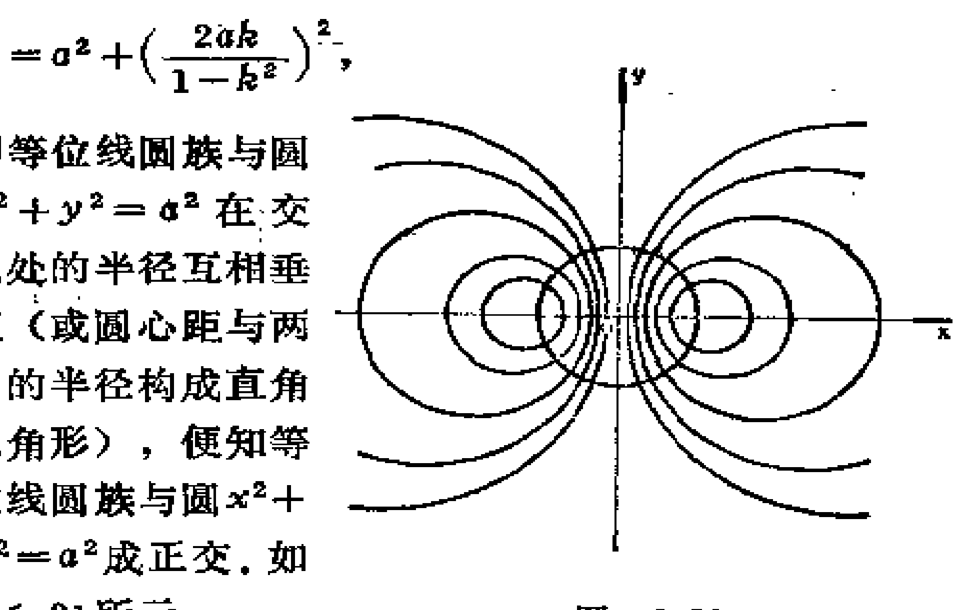


图　6·21

3164．$z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$　$(a>0)$．

解　等位线为曲线族

$$\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}=k,$$

其中 k 为一切实数，但要除去点 $(-a,0)$ 及 $(a,0)$．当 $k=0$ 时，$y=0$，即为 Ox 轴，但不包含上述两点；当 $k\neq0$ 时，方程可变形为

$$x^2+\left(y-\frac{a}{k}\right)^2$$

$$=a^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right),$$

这是圆心在Oy轴上且经过点$(-a,0)$及$(a,0)$但不包括这两点在内的圆族，如图6·22所示.

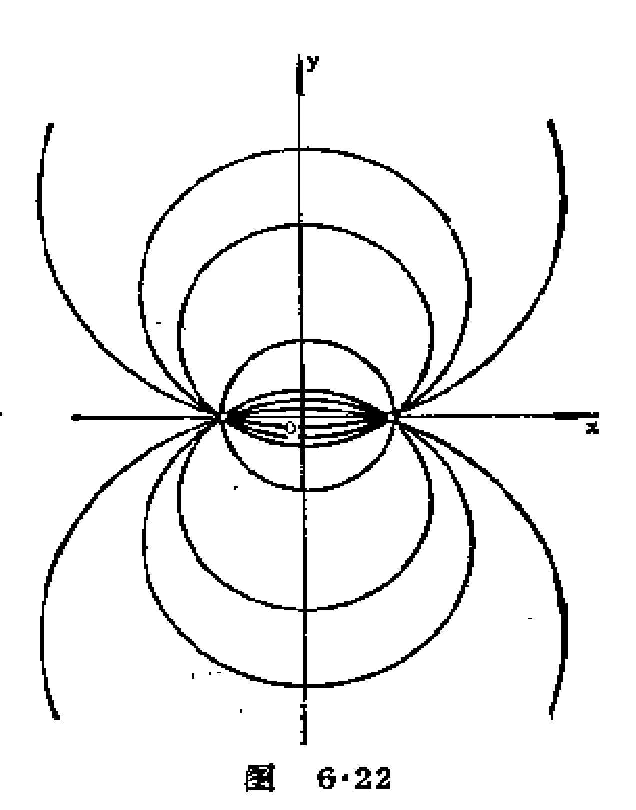


图 6·22

3165. $z=\operatorname{sgn}(\sin x\sin y)$.

解 若$z=0$，则$\sin x\cdot\sin y=0$，此即直线族

$$x=m\pi\text{和}y=n\pi\quad(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

若$z=-1$或$z=1$，则$\sin x\sin y<0$或$\sin x\sin y>0$，此即正方形系

$$m\pi<x<(m+1)\pi,\quad n\pi<y<(n+1)\pi,$$

其中$z=(-1)^{m+n}$.如图6·23所示，$z=0$时为图中网格直线；$z=1$为图中带斜线的正方形；$z=-1$为图中空白正方形，但后两者都不包括边界.

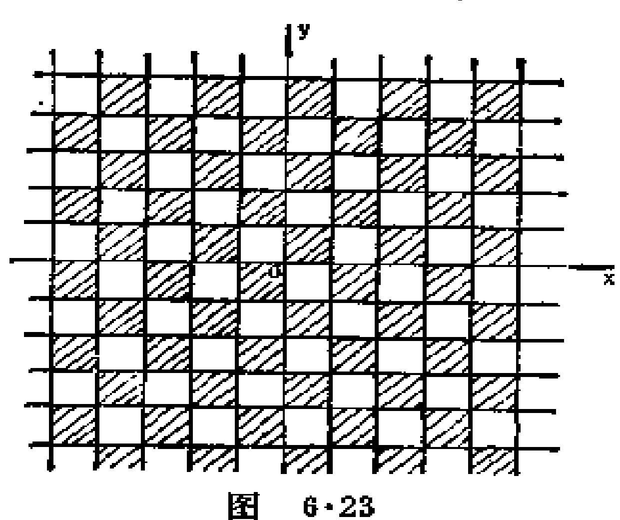


图 6·23

求下列函数的等位

面：

3166. $u=x+y+z$.

解 等位面为平行平面族

$$x+y+z=k,$$

其中 k 为一切实数.

3167. $u=x^2+y^2+z^2$.

解 等位面为中心在原点的同心球族

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (a\geqslant 0),$$

其中当 $a=0$ 时即为原点.

3168. $u=x^2+y^2-z^2$.

解 当$u=0$ 时等位面为圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$；当 $u>0$ 时等位面为单叶双曲面族 $x^2+y^2-z^2=a^2(a>0)$；当 $u<0$ 时等位面为双叶双曲面族$-x^2-y^2+z^2=a^2(a>0)$.

3169. $u=(x+y)^2+z^2$.

解 等位面为曲面族

$$(x+y)^2+z^2=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时为$x+y=0$和$z=0$. 当$a>0$ 时作坐标变换

$$\begin{cases} x'=x\cos\frac{\pi}{4}+y\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \\ y'=-x\sin\frac{\pi}{4}+y\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \\ z'=z, \end{cases}$$

这是旋转变换。在新坐标系中原等位面方程转化为

$$2x'^2+z'^2=a^2,$$

即

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

这是以 y' 轴为公共轴的椭圆柱面，母线的方向平行于 y' 轴，准线为 $y'=0$ 平面上的椭圆

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

长半轴为 a（z'轴方向），短半轴为$\frac{a}{\sqrt{2}}$（x' 轴方向）.

y'轴在新系 $O-x'y'z'$中的方程为

$$\begin{cases}x'=0,\\ z'=0,\end{cases}$$

面在旧系 $O-xyz$ 中的方程为

$$\begin{cases}x+y=0,\\ z=0,\end{cases}$$

即为所求的椭圆柱面族的公共对称轴.

3170. $u=sgn\sin(x^2+y^2+z^2)$.

解 当 $u=0$ 时等位面为球心在原点的同心球族

$x^2+y^2+z^2=n\pi\quad(n=0,1,2,\cdots)$.

当 $u=-1$ 或 $u=1$ 时等位面为球层族

$n\pi<x^2+y^2+z^2<(n+1)\pi\qquad(n=0,1,2,\cdots)$,

其中 $u=(-1)^{v}$.

根据曲面的已知方程研究其性质：

3171. $z=f(y-ax)$.

解 引入参数 t，s，将曲面方程$z=f(y-ax)$表成参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=at+s, \\ z=f(s). \end{cases}$$

今固定 s，得到以 t 为参数的直线方程，其方向数为 1，a，0. 因此，曲面为以 1，a，0 为母线方向的一个柱面. 令 $t=0$，可得

$$\begin{cases} x=0, \\ y=s, \\ z=f(s), \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=0, \\ z=f(y), \end{cases}$$

这是 $x=0$ 平面上的一条曲线，也是柱面

$$z=f(y-ax)$$

的一条准线.

3172. $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 这是绕 Oz 轴旋转的旋转曲面的标准形式. 令 $y=0$，得曲线

$$\begin{cases} y=0, \\ z=f(x) \quad (x\geqslant 0), \end{cases}$$

它是旋转曲面的一条母线.

3173. $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t,s，将曲面方程 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases}x=t,\\y=st\ (t\neq 0),\\z=tf(s).\end{cases}$$

今固定 s，这是以 t 为参数的一条过原点的直线。因此，所给曲面为顶点在原点的一锥面，但不包括原点在内。令 $t=1$，得曲线

$$\begin{cases}x=1,\\y=s,\\z=f(s),\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x=1,\\z=f(y),\end{cases}$$

这是 $x=1$ 平面上的一条曲线，也是锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一条准线。

3174[+][*]. $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数t,s,将曲面方程$z=f\left(\frac{y}{x}\right)$表成参数方程

$$\begin{cases}x=t,\\y=st,\\z=f(s).\end{cases}$$

---

* 题号右上角"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明。中译本基本是按俄文第二版翻译的。俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

今固定 s，这是一条过点$(0,0,f(s))$的直线，方向数为 $1,s,0$. 因此，它与Oz轴垂直，与 Oxy 平面平行，且其方向与 s 有关. 从而得知，曲面 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表示一个直纹面. 一般说来，它既不是柱面，又不是锥面. 令 $t=1$，得到直纹面的一条准线

$$\begin{cases} x=1, \\ z=f(y). \end{cases}$$

从此曲线上每一点引一条与 Oz轴垂直且相交的直线. 这样的直线的全体，便构成由 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 所表示的直纹面.

3175. 作出函数

$$F(t)=f(\cos t,\ \sin t)$$

的图形，式中

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & 若 y\geqslant x, \\ 0, & 若 y<x. \end{cases}$$

解 按题设，当 $\sin t\geqslant \cos t$，即$\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant t\leqslant\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$F(t)=1$；而当

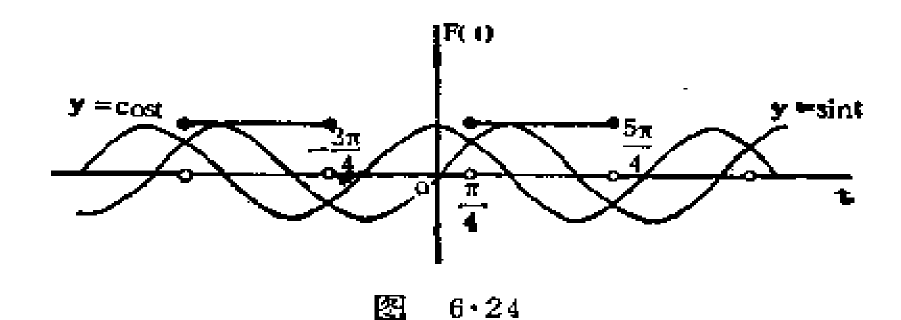


图 6·24

$\sin t<\cos t$，即$-\frac{3}{4}\pi+2k\pi<t<\frac{\pi}{4}+2k\pi$时，$F(t)=0$。如图6·24所示。

3176. 若

$$f(x,\ y)=\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

求$f\left(1,\ \frac{y}{x}\right)$.

解 $f\left(1,\ \frac{y}{x}\right)=\frac{2\cdot1\cdot\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$.

3177. 若

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\ (x>0),$$

求$f(x)$.

解 由$f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$知$f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

3178. 设

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1).$$

若当$y=1$时$z=x$，求函数f和z.

解 因为当$y=1$时$z=x$，所以

$$f(\sqrt{x}-1)=x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$$
$$=(\sqrt{x}-1)[(\sqrt{x}-1)+2],$$

从而得

$$f(t)=t(t+2)=t^2+2t,$$

且

$$z=\sqrt{y}+x-1 \quad (x>0).$$

3179. 设

$$z=x+y+f(x-y).$$

若当$y=0$时，$z=x^2$，求函数f及z。

解 因为当$y=0$时$z=x^2$，所以

$$x^2=x+f(x),$$

即

$$f(x)=x^2-x,$$

且

$$z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2.$$

3180. 若$f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，求$f(x,y)$。

解 因为

$$f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$=(x+y)^2\frac{x-y}{x+y}=(x+y)^2\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}},$$

所以

$$f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}.$$

3181. 证明：对于函数

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

有

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}f(x,y)\right\}=1;\quad \lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}f(x,y)\right\}=-1,$$

从而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在。

证 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1,$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}f(x,y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right\}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

由于两个单极限都存在，而累次极限不等，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在。

3182. 证明：对于函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$

有

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}f(x,y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}f(x,y)\right\}=0,$$

然而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在.

证 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}$

$$=\lim_{x\to 0}0=0,$$

$$\lim_{y\to0}\left\{\lim_{x\to0}f(x,y)\right\}=\lim_{y\to0}\left\{\lim_{x\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}$$

$$=\lim_{y\to0}0=0.$$

如果按 $y=kx\to0$ 的方向取极限，则有

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^4k^2}{x^4k^2+x^2(1-k)^2}.$$

特别地，分别取 $k=0$ 及 $k=1$，便得到不同的极限 0 及 1．因此，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在．

3183．证明：对于函数

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

累次极限 $\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\right\}$ 和 $\lim\limits_{y\to0}\left\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\right\}$ 不存在，然而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$．

证 由不等式

$$0\leqslant\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

知 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$．

但当 $x\neq\frac{1}{k\pi}$，$y\to0$ 时，$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 的极限不存在，因此累次极限 $\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\right\}$ 不存在．同法可证累次极限 $\lim\limits_{y\to0}\left\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\right\}$ 也不存在．

3184．求 $\lim\limits_{x\to a}\left\{\lim\limits_{y\to b}f(x,y)\right\}$ 及 $\lim\limits_{y\to b}\left\{\lim\limits_{x\to a}f(x,y)\right\}$，设：

(а) $f(x, y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

(б) $f(x, y)=\frac{x^y}{1+x^y}$, $a=+\infty$, $b=+0$;

(в) $f(x, y)=\sin\frac{\pi x}{2x+y}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

(г) $f(x, y)=\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}$, $a=0$, $b=\infty$;

(д) $f(x, y)=\log_x(x+y)$, $a=1$, $b=0$.

解 (а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty} 0=0$,

$\lim\limits_{y\to\infty}\left\{\lim\limits_{x\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{y\to\infty}\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}$

$=\lim\limits_{y\to\infty} 1=1$;

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\lim\limits_{y\to+0} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\lim\limits_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$\lim\limits_{y\to+0}\left\{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{y\to+0}\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right\}$

$=\lim\limits_{y\to+0} 1=1$;

(в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right\}$

$$=\lim_{x\to\infty} 0 = 0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty} 1 = 1;$$

(г) $$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\cdot\lim_{y\to\infty}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{0\cdot\operatorname{tg}1\right\}=0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}}{\frac{xy}{1+xy}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty} 1 = 1;$$

(д) $$\lim_{x\to 1}\left\{\lim_{y\to 0} f(x, y)\right\}=\lim_{x\to 1}\left\{\lim_{y\to 0}\log_x(x+y)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x}=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 1} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\infty.$$

求下列极限:

3185. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

解 由不等式 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$ 得

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{|x+y|}{x^2+y^2-|xy|}\leqslant\frac{|x+y|}{|xy|}$$

$$\leqslant\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|},$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}\right)=0$，故有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0.$$

3186. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

解 由不等式

$$0\leqslant\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\leqslant\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

及 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)=0$，即得

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0.$$

3187. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\left(\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y\right)=a.$

3188. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left[\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}-2\cdot\frac{x}{e^x}\cdot\frac{y}{e^y}\right]=0^{*)}.$$

*) 利用564题的结果。

3189. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解 由不等式

$$0\leqslant\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0$，即得

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

3190. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解 由不等式

$$|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{4}|\ln(x^2+y^2)|$$

及 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)=\lim\limits_{t\to+0}\frac{1}{4}t^2\ln t=0$，即得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=e^0=1.$$

3191. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x}{x+y}}$

$$=\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to a}} e^{[x\ln(1+\frac{1}{x})]\cdot\frac{x}{x+y}}$$

$$=e^{[\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})]\cdot[\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\frac{x}{x+y}]}=e^{1\cdot 1}=e.$$

3192. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+e^0)}{1}=\ln 2.$

3193[+]. 若 $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, 问下列极限沿怎样的方向 φ 有确定的极限值存在:

(a) $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$;　　(б) $\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\cdot\sin 2xy$.

解 (a) $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{\cos\varphi}{\rho}}$

$$=\begin{cases}0, & \text{当}\cos\varphi<0;\\ 1, & \text{当}\cos\varphi=0;\\ +\infty, & \text{当}\cos\varphi>0.\end{cases}$$

于是，仅当 $\cos\varphi\leqslant 0$ 即 $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时，所给的极限

才有确定的值.

(б) $e^{x^2-y^2}\sin 2xy=e^{\rho^2\cos 2\varphi}\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$.

当 $\rho\to+\infty$时，$\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$ 有界，除$\varphi=\frac{k\pi}{2}$ $(k=0, 1, 2, 3)$外无极限，且

$$\lim_{\rho\to+\infty}e^{\rho^2\cos 2\varphi}=\begin{cases}0, & 当\ \cos 2\varphi<0;\\ 1, & 当\ \cos 2\varphi=0;\\ +\infty, & 当\ \cos 2\varphi>0.\end{cases}$$

于是，仅当$\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$及$\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$以及 $\varphi=0$，$\varphi=\pi$ 时才有确定的极限.

求下列函数的不连续点：

3194. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$在点 (0, 0) 无定义，故原点(0,0)为此函数的不连续点.以下各题类似情况，不再说明.

3195. $u=\frac{xy}{x+y}$.

解 直线 $x+y=0$ 上的一切点均为$u=\frac{xy}{x+y}$的不连续点.

3196. $u=\frac{x+y}{x^3+y^3}$.

解 对于任意不等于零的实数 a，有

$$\lim_{\substack{x\to a\\y\to -a}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to a\\y\to -a}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{3a^2}.$$

于是，对于直线 $x+y=0$ 上除去原点 O外的一切点均为可移去的不连续点．而原点 $O(0,0)$ 为无穷型不连续点．

3197. $u=\sin\frac{1}{xy}$.

解 $xy=0$ 上的一切点即两坐标轴上的诸点均为 $u=\sin\frac{1}{xy}$ 的不连续点．

3198. $u=\frac{1}{\sin x\sin y}$.

解 直线 $x=m\pi$ 及 $y=n\pi$ $(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 上的各点均为 $u=\frac{1}{\sin x\sin y}$ 的不连续点．

3199. $u=\ln(1-x^2-y^2)$.

解 圆周 $x^2+y^2=1$ 上各点是 $u=\ln(1-x^2-y^2)$ 的不连续点．

3200. $u=\frac{1}{xyz}$.

解 坐标面：$x=0$，$y=0$，$z=0$ 上各点均为 $u=\frac{1}{xyz}$ 的不连续点．

3201. $u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

解 点(a,b,c)为$u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$的不连续点.

3202. 证明：函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & 若 x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & 若 x^2+y^2=0,\end{cases}$$

分别对于每一个变数x或y(当另一变数的值固定时)是连续的，但并非对这些变数的总体是连续的.

证 先固定$y=a\neq 0$，则得x的函数

$$g(x)=f(x,a)=\begin{cases}\frac{2ax}{x^2+a^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即$g(x)=\frac{2ax}{x^2+a^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$，它是处处有定义的有理函数. 又当$y=0$时，$f(x,0)\equiv 0$，它显然是连续的. 于是，当变数y固定时,函数$f(x,y)$对于变数x是连续的. 同理可证，当变数x固定时.函数$f(x,y)$对于变数y是连续的.

作为二元函数，$f(x,y)$虽在除点$(0,0)$外的各点均连续,但在点$(0,0)$不连续.事实上，当动点$P(x,y)$沿射线$y=kx$趋于原点时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y=kx)}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{2k}{1+k^2},$$

对于不同的k可得不同的极限值，从而知$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)$不存在. 因此，函数$f(x,y)$在原点不是二元连续

的.

3203. 证明：函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & 若x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & 若x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在点$O(0,0)$沿着过此点的每一射线

$$x=t\cos\alpha,\quad y=t\sin\alpha\quad (0\leqslant t<+\infty)$$

连续，即

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0);$$

但此函数在点 $(0,0)$ 并非连续的.

证 当 $\sin\alpha=0$时，$\cos\alpha=1$或-1. 于是，当$t\neq 0$时，$f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=\dfrac{t^2\cdot 0}{t^4+0}=0$，而 $f(0,0)=0$，故有 $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0)$.

当 $\sin\alpha\neq 0$时，有

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{0}{0+\sin^2\alpha}=0,$$

故 $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0)$.

其次，设动点 $P(x,y)$沿抛物线 $y=x^2$ 趋于原点，得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y=x^2)}} f(x,\ y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0).$$

因此，函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$不连续.

3204. 证明：函数

$$f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}, \text{若 } y\neq 0 \text{ 及 } f(x,0)=0$$

的不连续点的集合不是封闭的.

证 当 $y_0\neq 0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 显见是连续的，即 $f(x,y)$ 在除去 Ox 轴以外的一切点均连续.

又因 $|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|\leqslant|x|$，故知 $f(x,y)$ 在原点也是连续的.

考虑当 $x_0\neq 0$ 时，对于点 $(x_0,0)$，由于极限

$$\lim_{y\to 0}f(x_0,y)=\lim_{y\to 0}x_0\sin\frac{1}{y}$$

不存在，故知 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,0)$ 不连续.

这样，我们证明了，函数 $f(x,y)$ 的全部不连续点为 Ox 轴上除去原点外的一切点. 显然，原点是不连续点集合的一个聚点，但它本身却不是 $f(x,y)$ 的不连续点. 因此，$f(x,y)$ 的不连续点的集合不是封闭的.

3205. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在某域 G 内对变数 x 是连续的，而关于 x 对变数 y 是一致连续的，则此函数在所考虑的域内是连续的.

证 任意固定一点 $P_0(x_0,y_0)\in G$.

由于 $f(x,y)$ 关于 x 对变数 y 一致连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$，使当 $(x,y')\in G$，$(x,y'')\in G$ 且 $|y'-y''|<\delta_1$ 时，就有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)关于变数 x 是连续的，故对上述的 ε ，存在 $\delta_2>0$，使当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时，就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $0<\delta\leqslant min\{\delta_1,\delta_2\}$，并使点$(x_0,y_0)$的 δ 邻域全部包含在区域G 内，则当点 $P(x,y)$属于点(x_0,y_0)的 δ 邻域，即$|PP_0|<\delta$时，

$$|x-x_0|<\delta\leqslant\delta_2,\quad |y-y_0|<\delta\leqslant\delta_1.$$

从而有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|\\&\quad+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，$f(x,y)$在点P_0连续．由 P_0的任意性知，函数 $f(x,y)$在G内是连续的．

3206． 证明：若在某域 G 内函数 $f(x,y)$对变数x是连续的，并满足对变数 y 的里普什兹条件，即

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

式中 $(x,y')\in G,(x,y'')\in G$而L为常数，则此函数在已知域内是连续的．

证 由于 $f(x,y)$在G内满足对 y 的里普什兹条件，故知 $f(x,y)$在 G 内关于 x 对变数 y 是一致连续的．因此，由3205题的结果，即知 $f(x,y)$在 G 内是连续的．

3207． 证明：若函数 $f(x,y)$分别地对每一个变数 x 和 y 是

连续的并对于其中的一个是单调的，则此函数对两个变数的总体是连续的（尤格定理）.

证 不妨设 $f(x,y)$ 关于 x 是单调的.

设 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的定义域 G 内的任一点. 由于 $f(x,y)$ 关于 x 连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$（假定 δ_1 足够小，使我们所考虑的点都落在 G 内），使当 $|x-x_0|\leqslant\delta_1$ 时，就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于点 $(x_0-\delta_1,y_0)$ 及 $(x_0+\delta_1,y_0)$，由于 $f(x,y)$ 关于 y 连续，故对上述的 ε，存在 $\delta_2>0$（也要求 δ_2 足够小，使所考虑的点落在 G 内），使当 $|y-y_0|<\delta_2$ 时，就有

$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

及

$$|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|\varDelta x|<\delta$，$|\varDelta y|<\delta$ 时，由于 $f(x,y)$ 关于 x 单调，故有

$$\begin{aligned}&|f(x_0+\varDelta x,y_0+\varDelta y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant&\max\{|f(x_0+\delta_1,y_0+\varDelta y)-f(x_0,y_0)|,\\ &|f(x_0-\delta_1,y_0+\varDelta y)-f(x_0,y_0)|\}.\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}&|f(x_0\pm\delta_1,y_0+\varDelta y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant&|f(x_0\pm\delta_1,y_0+\varDelta y)-f(x_0\pm\delta_1,y_0)|\\ &+|f(x_0\pm\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|\end{aligned}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故当$|\Delta x|<\delta$，$|\Delta y|<\delta$时，就有

$$|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon,$$

即$f(x, y)$在点(x_0, y_0)是连续的．由点(x_0, y_0)的任意性知，$f(x, y)$是G内的二元连续函数．

3208． 设函数$f(x, y)$于域$a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$上是连续的，而函数叙列$\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 在$[a, A]$上一致收敛并满足条件$b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$．证明：函数叙列

$$F_n(x)=f[x, \varphi_n(x)] \quad (n=1, 2, \cdots)$$

也在$[a, A]$上一致收敛．

证 由于$b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$，故$F_n(x)=f[x, \varphi_n(x)]$有意义．

由题设$f(x, y)$在域$a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$上连续，故在此域上一致连续，即对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对于此域中的任意两点$(x_1, y_1)$，$(x_2, y_2)$，只要$|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$时，就有

$$|f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)|<\varepsilon.$$

特别地，当$|y_1-y_2|<\delta$时，对于一切的$x\in[a, A]$，均有

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|<\varepsilon.$$

对于上述的$\delta>0$，因为$\varphi_n(x)$在$[a, A]$上一致收敛，故存在自然数N，使当$m>N$，$n>N$时，对于一切的$x\in[a, A]$，均有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|<\delta.$$

于是，对任给的$\varepsilon>0$，存在自然数N，使当$m>$

N，$n>N$时，对于一切的 $x\in[a,A]$，均有

$$|F_n(x)-F_m(x)|$$
$$=|f[x,\varphi_n(x)]-f[x,\varphi_m(x)]|<\varepsilon.$$

因此，$F_n(x)$在$[a,A]$上一致收敛.

3209．设：1）函数$f(x,y)$于域 $R(a<x<A;\ b<y<B)$内是连续的；2）函数$\varphi(x)$于区间(a,A)内连续并有属于区间(b,B)内的值．证明：函数

$$F(x)=f[x,\varphi(x)]$$

于区间(a,A)内是连续的.

证 设点(x_0,y_0)为域 R 中的任一点．由题设知函数$f(x,y)$于域 R 中连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$（$(x,y)\in R$）时，就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

再由 $\varphi(x)$在(a,A) 中的连续性可知，对上述的$\delta>0$，存在$\eta>0$（可取 $\eta<\delta$），使当$|x-x_0|<\eta$（$x\in(a,A)$）时，恒有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|y-y_0|<\delta.$$

于是，

$$|f[x,\varphi(x)]-f[x_0,\varphi(x_0)]|<\varepsilon,$$

即

$$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon.$$

因此，$F(x)$ 在点 x_0 处连续．由 x_0 的任意性知函数$F(x)$在(a,A)内是连续的.

3210．设：1)函数 $f(x,y)$于域 R（$a<x<A$；$b<y<B$）内是连续的；2）函数 $x=\varphi(u,v)$及$y=\psi(u,v)$ 于域 R'

$(a'<u<A';\ b'<v<B')$ 内是连续的并有分别属于区间 (a,A) 和 (b,B) 的值. 证明：函数

$$F(u,v)=f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]$$

于域 R' 内连续.

证 以下假定所取的 δ 或 η 足够小，使点的 δ 或 η 邻域都在所给的域内.

设点 (x_0,y_0) 为域 R 中的任一点. 由于 $f(x,y)$ 在 R 内连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时，就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

再由 φ 及 ψ 的连续性知，对于上述的 δ，存在 $\eta>0$，使当 $|u-u_0|<\eta$，$|v-v_0|<\eta$ 时，就有

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,$$

其中 $x_0=\varphi(u_0,v_0)$，$y_0=\psi(u_0,v_0)$.

于是，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使当 $|u-u_0|<\eta$，$|v-v_0|<\eta$ 时，就有

$$|f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]-f[\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0)]|<\varepsilon,$$

即

$$|F(u,v)-F(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

因此，$F(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 连续，由 (u_0,v_0) 的任意性知，函数 $F(u,v)$ 于域 R' 内连续.

§2. 偏导函数. 多变量函数的微分

1° **偏导函数** 若所论及的多变数的函数的一切偏导函

数是连续的，则微分的结果与微分的次序无关．

2° **多变量函数的微分** 若自变数 x,y,z 的函数 $f(x,y,z)$ 的全增量可写为下形

$$\Delta f(x,y,z)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho),$$

式中 A，B，C 与 Δx，Δy，Δz 无关而 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，则称函数 $f(x,y,z)$ 可微分，而增量的线性主部 $A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$ 等于

$$df(x,y,z)=f'_x(x,y,z)dx+f'_y(x,y,z)dy+f'_z(x,y,z)dz, \tag{1}$$

（其中 $dx=\Delta x, dy=\Delta y, dz=\Delta z$）称为此函数的微分．

当变数 x，y，z 为其他自变数的可微分的函数时，公式(1)仍有其意义．

若 x，y，z 为自变数，则对于高阶的微分，有符号公式

$$d^nf(x,y,z)=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z).$$

3° **复合函数的导函数** 若 $w=f(x,y,z)$，其中 $x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$，$z=\chi(u,v)$ 且函数 φ,ψ,χ 可微分，则

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

计算函数 w 的二阶导函数时最好用下列符号公式：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 w+\frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z}$$

及 $$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x}+Q_2\frac{\partial}{\partial y}\right.$$

$$\left.+R_2\frac{\partial}{\partial z}\right)w+\frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

其中 $$P_1=\frac{\partial x}{\partial u},\ Q_1=\frac{\partial y}{\partial u},\ R_1=\frac{\partial z}{\partial u}$$

及 $$R_2=\frac{\partial x}{\partial v},\ Q_2=\frac{\partial y}{\partial v},\ R_2=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4° **在已知方向上的导函数** 若用方向余弦 $\{\cos\alpha;\cos\beta,\cos\gamma\}$ 表 $Oxyz$ 空间内的方向 l，且函数 $u=f(x,y,z)$ 可微分，则沿方向 l 的导函数按下式来计算

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

在已知点函数增加最迅速的速度之大小与方向用矢量——函数的梯度

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

来表示，它的大小等于

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211. 证明。

$$f'_x(x,\ b)=\frac{d}{dx}[f(x,\ b)].$$

证 令 $\varphi(x)=f(x,b)$，则

$$\frac{d}{dx}[f(x,b)]=\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x}=f'_x(x,b).$$

注　在求某一固定点的导数及微分时，用本题的结果常可减少运算量．在本节中，我们就多次利用本题的结果来简化运算．

3212． 设：

$$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}},$$

求 $f'_x(x,\ 1)$．

解 由于 $f(x,1)=x$，故 $f'_x(x,1)=1$．

求下列函数的一阶和二阶偏导函数：

3213． $u=x^4+y^4-4x^2y^2$．

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-16xy^{*)}.$$

*) 以下各题不再写 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，而仅写 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，因为当它们连续时是相等的，并且在今后各题中均据

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$理解为$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

3214. $u=xy+\frac{x}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=1-\frac{1}{y^2}.$$

3215. $u=\frac{x}{y^2}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-\frac{2}{y^3}.$$

3216. $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2x\cdot x}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{3}{2}y^2\cdot\frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{2}xy\cdot\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{x(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x d y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

3217. $u=x\sin(x+y)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\cos(x+y)+\cos(x+y)-x\sin(x+y)$$

$$=2\cos(x+y)-x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y).$$

3218. $u=\frac{\cos x^2}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x\sin x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos x^2}{y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2\cos x^2}{y^3}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2x\sin x^2}{y^2}.$$

3219. $u=\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{2x}{y}\cdot 2\sec^2\frac{x^2}{y}\cdot\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}\cdot\frac{2x}{y}$$

$$=\frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{8x^2}{y^2}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{y^3}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{2x^4}{y^4}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}-\frac{4x^3}{y^3}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y}$$

3220. $u=x^y$.

解 由 $u=x^y=e^{y\ln x}$即得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^{y\ln x}\cdot\ln x=x^y\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$$

$$=x^{y-1}(1+y\ln x)\quad(x>0).$$

3221. $u=\ln(x+y^2)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{x+y^2}-\frac{2y\cdot 2y}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

3222. $u=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

3223. $u=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$.

解 由776题知

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y-\varepsilon\pi,$$

其中 $\varepsilon=0$，1 或 -1．于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$

本题如不用776题的结果，直接求导数也可获解．例如，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}.$$

3224．$u=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\ ^{*)}$$

$$=\frac{|y|}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\left[-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]^{*)}$$

$$=-\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{|y|}=-\frac{x\,\mathrm{sgn}\,y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{xy}{|y|(x^2+y^2)}\right]$$

$$=-\frac{x|y|(x^2+y^2)-xy\left[\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)+2y|y|\right]}{y^2(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)-2y|y|}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2\,\mathrm{sgn}\,y-y|y|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2-y^2)\,\mathrm{sgn}\,y}{(x^2+y^2)^2}\quad(y\neq 0).$$

*) 利用3216题的结果.

3225. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

利用对称性，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

3226. $u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$.

解 $u=x^z y^{-z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=zx^{z-1}y^{-z}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-zx^zy^{-z-1}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=z(z-1)x^{z-2}y^{-z}=\frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(-z)(-z-1)x^zy^{-z-2}=\frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln^2\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(\frac{z}{x}u\right)'_y=\frac{z}{x}\left[-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\right]$$

$$=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\left(-\frac{z}{y}u\right)'_z=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$$

$$=-\frac{1+z\ln\frac{x}{y}}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\left(u\ln\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}+\frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$$

$$=\frac{1+z\ln\frac{x}{y}}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\quad\left(\frac{x}{y}>0\right).$$

3227. $u=x^{\frac{y}{z}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x=\frac{u\ln x}{z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x=-\frac{yu\ln x}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{xyz\frac{\partial u}{\partial x}-yzu}{x^2z^2}=\frac{y(y-z)u}{x^2z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\ln x}{z}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\ln^2 x}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-y\ln x\cdot\left[\frac{z^2\frac{\partial u}{\partial z}-2uz}{z^4}\right]$$

$$=\frac{yu\ln x\cdot(2z+y\ln x)}{z^4},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{xz}\left(u+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{u(z+y\ln x)}{xz^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\ln x\cdot\left(\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{u}{z^2}\right)$$

$$=-\frac{u\ln x\cdot(z+y\ln x)}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=-\frac{y}{z^2}\left(\ln x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{x}\right)=-\frac{yu(z+y\ln x)}{xy^3}.$$

3228. $u=x^{y^z}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}=\frac{u y^z}{x}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z y^{z-1}x^{y^z}\ln x=zu y^{z-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z} y^z\ln x\cdot\ln y=u y^z\ln x\cdot\ln y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^z\left(-\frac{u}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{u y^z(y^z-1)}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=z\ln x\cdot\left[y^{z-1}\frac{\partial u}{\partial y}+(z-1)y^{z-2}u\right]$$

$$=uzy^{z-2}\ln x\cdot(zy^z\ln x+z-1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(y^z\frac{\partial u}{\partial z}+uy^z\ln y\right)\ln x\cdot\ln y$$

$$=uy^z\ln x\cdot\ln^2 y\cdot(1+y^z\ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}\left(y^z\frac{\partial u}{\partial y}+uzy^{z-1}\right)$$

$$=\frac{uzy^{z-1}(y^z\ln x+1)}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\left(y^{z-1}u+uzy^{z-1}\ln y+zy^{z-1}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\ln x$$

$$=uy^{z-1}\ln x\cdot[1+z\ln y\cdot(1+y^z\ln x)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}=y^x \ln y \cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x} \ln x+\frac{u}{x}\right)$$

$$=\frac{u y^x \ln y \cdot\left(y^x \ln x+1\right)}{x} \quad (x>0, y>0).$$

3229．设(a)$u=x^2-2xy-3y^2$；(б) $u=x^{y^2}$；(в) $u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$，验证等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

证　(a) $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-2y$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-2x-6y$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=-2,$$

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

(б) $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2 x^{y^2-1}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2yx^{y^2}\ln x \quad (x>0)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=2yx^{y^2-1}+2y^3x^{y^2-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=2y^3x^{y^2-1}\ln x+2yx^{y^2-1},$$

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

(в) 当 $0<x\leqslant y$ 时，我们有

$$u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}=\arccos\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}=-\frac{1}{2\sqrt{x(y-x)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2y^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2(y-x)}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y^2(y-x)}}+\frac{\sqrt{x}}{4y(y-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

于是，当 $0<x\leqslant y$时，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

当 $y\leqslant x<0$ 时，$u=\arccos\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{-y}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{x-y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left[\frac{\sqrt{-x}}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\right]=-\frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{xy^2-y^3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{-x}\sqrt{xy^2-y^3}}+\frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{y^2}\ (x-y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

于是，当 $y\leqslant x<0$ 时，也有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

仔细观察可以看到，在不同的区域上，一阶偏导数相差一个符号，但二阶混合偏导数却是相等的。

3230．设 $f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，若 $x^2+y^2\neq 0$ 及 $f(0,0)=0$．证明

$$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0).$$

证 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{x}=-y,$$

故 $f'_x(0,y)=-y$，从而

$$f''_{xy}(0,0)=\frac{d}{dy}\left[f'_x(0,\ y)\right]\Big|_{y=0}=-1$$

同法可求得 $f'_y(x,0)=x$，从而

$$f''_{yx}(0,\ 0)=\frac{d}{dx}\left[f'_y(x,\ 0)\right]\Big|_{x=0}=1.$$

于是，$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

3231. 设 $u=f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数，就下列各题验证关于齐次函数的尤拉定理：

(a) $u=(x-2y+3z)^2$； (б) $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；

(в) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$.

证 关于 n 次齐次函数的尤拉定理如下：

设 n 次齐次函数 $f(x,y,z)$* 在域 A 中关于所有变量均有连续偏导函数，则下述等式成立

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,\ y,\ z)$$
$$=nf(x,y,z).$$

(a) 由于 $(tx-2ty+3tz)^2=t^2u$，故 u 为二次齐次函数．又因

---

* 为了书写的简便，在这里我们仅限于讨论三个变量的情形。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x-2y+3z),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-4(x-2y+3z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=6(x-2y+3z),$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=(x-2y+3z)(2x-4y$$

$$+6z)=2u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

(б) 由于对任何的 $t>0$,

$$\frac{tx}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2+(tz)^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=t^0\cdot u,$$

故 u 为零次齐次函数.又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(xy^2$$

$$+xz^2-xy^2-xz^2)=0\cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

(в) 由于

$$\left(\frac{tx}{ty}\right)^{\frac{ty}{tz}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}=t^0\cdot u\quad(t>0),$$

故函数 u 为零次齐次函数.又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(e^{\frac{y}{z}\ln\frac{x}{y}}\right)'_y\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\cdot\left[\frac{1}{z}\ln\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}\right]$$

$$=\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\ln\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y},$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=x\cdot\frac{yu}{xz}+y\cdot\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right)$$

$$-z\cdot\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y}=0\cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

3232. 证明:若可微函数 $u=f(x,y,z)$满足方程式

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu,$$

则它为 n 次齐次函数.

证 任意固定域中一点(x_0,y_0,z_0),考察下面的 t 的函数$(t>0)$:

$$F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n},$$

它当 $t>0$ 时有定义且是可微的．应用复合函数的求导法则，对 t 求导数即得

$$F'(t)=\frac{1}{t^n}\left\{x_0f'_x(tx_0,\ ty_0,\ tz_0)+y_0f'_y(tx_0,\ ty_0,\ tz_0)+z_0f'_z(tx_0,\ ty_0,tz_0)\right\}$$

$$-\frac{n}{t^{n+1}}f(tx_0,\ ty_0,\ tz_0)$$

$$=\frac{1}{t^{n+1}}\left\{tx_0f'_x(tx_0,ty_0,\ tz_0)+ty_0\cdot f'_y(tx_0,\ ty_0,tz_0)+tz_0f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)-nf(tx_0,ty_0,tz_0)\right\},$$

由于 $tx_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+ty_0f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)+tz_0$

$$\cdot f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)=nf(tx_0,ty_0,tz_0),$$

故

$$F'(t)=0.$$

从而当 $t>0$ 时，$F(t)=c$，其中 c 为常数．现在确定 c．为此，在定义 $F(t)$的等式中令 $t=1$，则得

$$c=f(x_0,y_0,z_0).$$

于是，

$$F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n}=f(x_0,y_0,z_0),$$

即

$$f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^n f(x_0,y_0,z_0).$$

上式说明函数 $f(x, y, z)$为一个 n 次的齐次函数，这就是所要证明的．

3233．证明：若 $f(x,y,z)$是可微分的 n 次齐次函数，则其偏导函数 $f'_x(x,y,z)$，$f'_y(x,y,z)$，$f'_z(x, y, z)$ 是$(n-1)$次的齐次函数．

证 由等式

$$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$$

两端分别对 x，y，z 求偏导函数，则得

$$tf'_1(tx,ty,tz)=t^n f'_1(x,y,z),$$

$$tf'_2(tx,ty,tz)=t^n f'_2(x,y,z),$$

$$tf'_3(tx,ty,tz)=t^n f'_3(x,y,z),$$

其中 $f'_1(\cdot,\cdot,\cdot)$，$f'_2(\cdot,\cdot,\cdot)$，$f'_3(\cdot,\cdot,\cdot)$ 分别代表 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$对第一个，第二个，第三个变量的偏导数．于是，

$$f'_1(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_1(x,y,z),$$

$$f'_2(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_2(x,y,z),$$

$$f'_3(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_3(x, y, z),$$

即偏导函数 $f'_x(x, y, z)$，$f'_y(x, y, z)$ 及 $f'_z(x, y, z)$

均为$(n-1)$次的齐次函数，

3234. 设 $u=f(x, y, z)$是可微分两次的 n 次齐次函数. 证明

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=n(n-1)u.$$

证 由3233题知：$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial u}{\partial z}$均为$(n-1)$次齐次函数.应用尤拉定理，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (1)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (2)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (3)$$

将(1)式两端乘以 x，(2)式两端乘以y，(3)式两端乘以 z，然后相加，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=(n-1)\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=n(n-1)u,$$

这就是所要证明的等式.

求下列函数的一阶和二阶微分(x, y, z 为自变数):

3235. $u=x^m y^n$.

解 $du=x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx+nx\,dy)$,

$$d^2u=m(m-1)x^{m-2}y^n dx^2+2mnx^{m-1}y^{n-1}dx\,dy+n(n-1)x^m y^{n-2}dy^2$$

$$=x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2dx^2+2mnxy\,dx\,dy+n(n-1)x^2dy^2].$$

3236. $u=\frac{x}{y}$.

解 $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$,

$$d^2u=\frac{y^2(dx\,dy-dx\,dy)-2y\,dy(y\,dx-x\,dy)}{y^4}$$

$$=-\frac{2}{y^3}(y\,dx-x\,dy)dy.$$

3237. $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

解 $du=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$d^2u=\frac{d(x\,dx+y\,dy)}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x\,dx+y\,dy)\cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{dx^2+dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{(x\,dx+y\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3238. $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解 $du=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$,

$$d^2u=\frac{d(xdx+ydy)}{x^2+y^2}-\frac{2(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{dx^2+dy^2}{x^2+y^2}-\frac{2(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{(y^2-x^2)(dx^2-dy^2)-4xydxdy}{(x^2+y^2)^2}.$$

3239. $u=e^{xy}$.

解 $du=e^{xy}(ydx+xdy)$,

$$d^2u=e^{xy}[(ydx+xdy)^2+2dxdy]$$
$$=e^{xy}[y^2dx^2+2(1+xy)dxdy+x^2dy^2].$$

3240. $u=xy+yz+zx$.

解 $du=(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$,

$$d^2u=2(dxdy+dydz+dzdx).$$

3241. $u=\frac{z}{x^2+y^2}$.

解 $du=-\frac{2z}{(x^2+y^2)^2}(xdx+ydy)+\frac{dz}{x^2+y^2}$

$$=\frac{(x^2+y^2)dz-2z(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$d^2u=\frac{1}{(x^2+y^2)^4}\{(x^2+y^2)^2[2(xdx+ydy)dz$$
$$-2(xdx+ydy)dz-2z(dx^2+dy^2)]$$